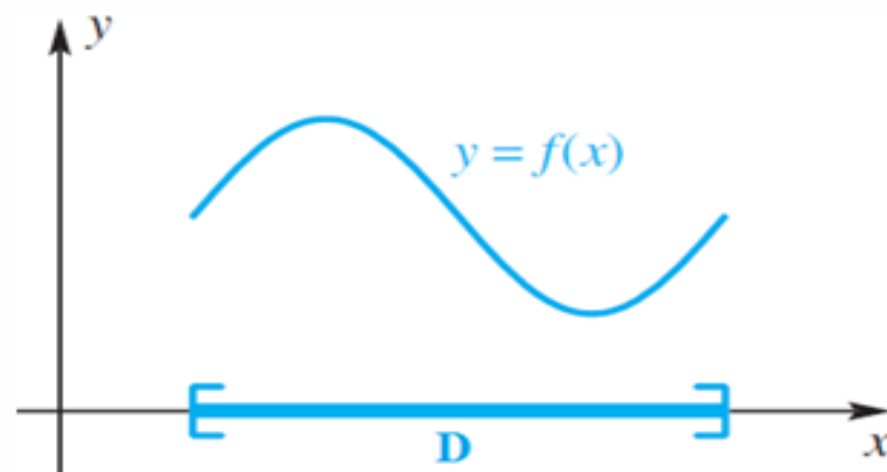


APLICACIONES DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION

- .1: Valores máximos y mínimos*
- .2: Teorema del valor medio*
- .3: Cómo afecta la derivada la forma de una gráfica*

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)

Sea f una función definida en un intervalo D



¿ $f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en D ?

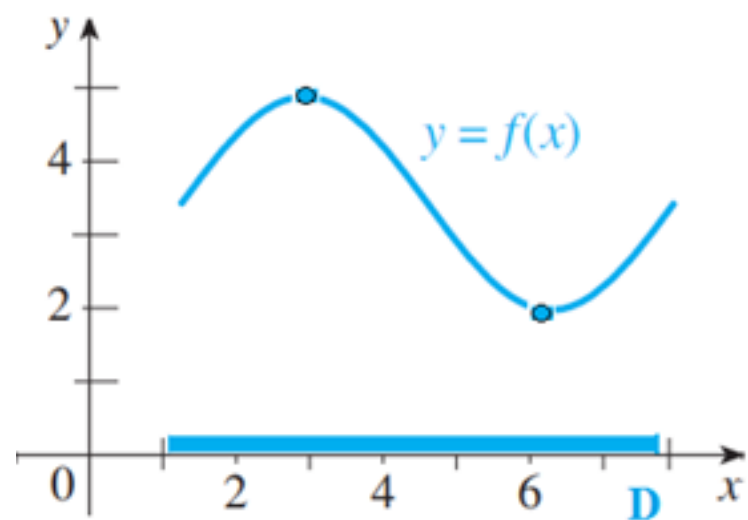
*Si tiene un valor máximo o un valor mínimo,
¿ dónde se alcanza?*

Si existen,

¿ Cuáles son los valores máximo y mínimo?

¿Cómo los obtengo?

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)



El valor más grande de f en D es 5 y
el valor más pequeño de f en D es 2.

5 es el *valor máximo* de f y ocurre en $x=3$, pues $f(3)=5$

2 es el *valor mínimo* de f y ocurre en $x=6$, pues $f(6)=2$

Valores extremos

Definición

Sea c un número en el dominio D de una función f .

Entonces $f(c)$ es el

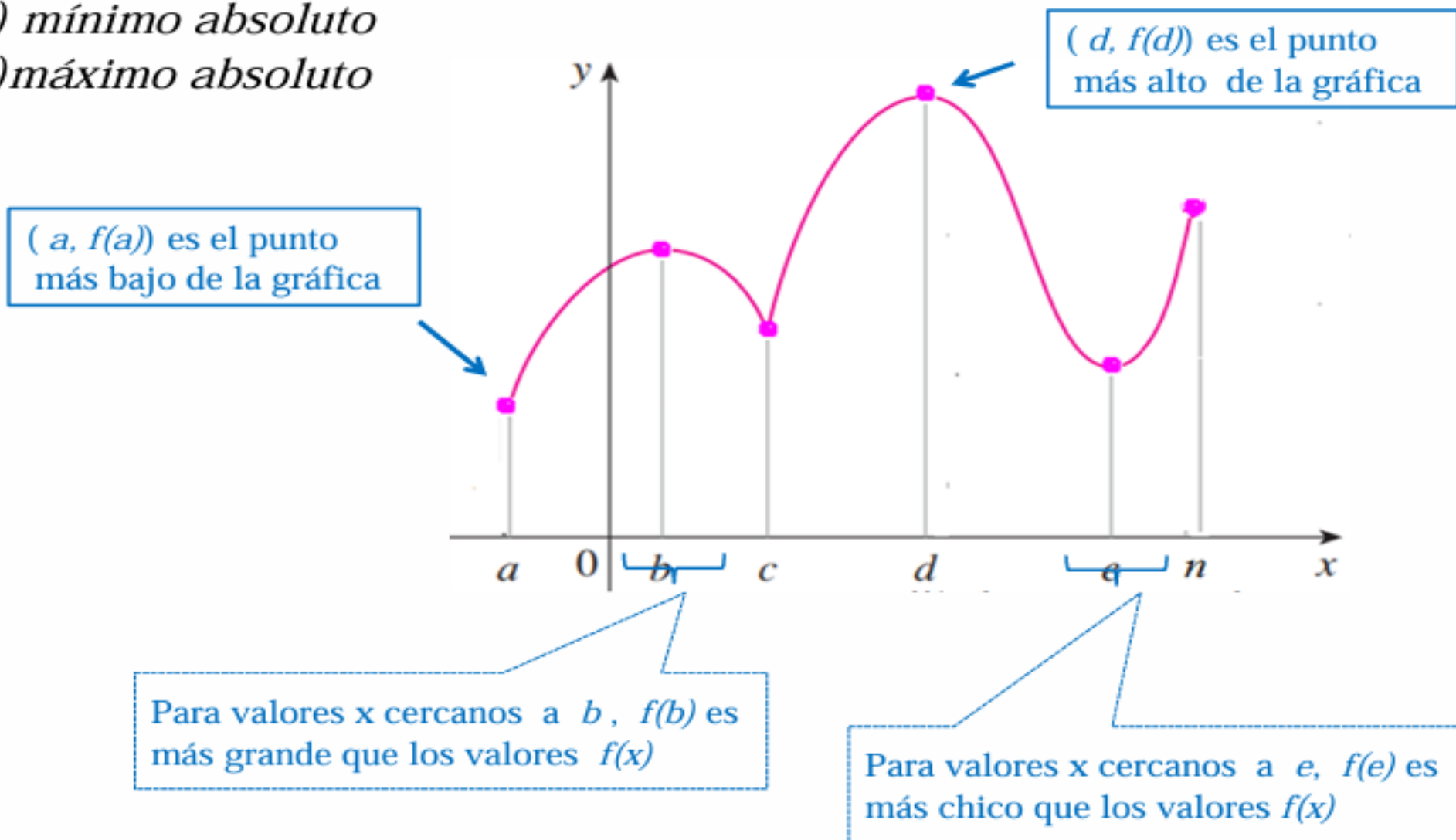
- valor **máximo absoluto (global)** de f sobre D
si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D .
- valor **mínimo absoluto (global)** de f sobre D
si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D .

Los valores máximos y mínimo de f se llaman *valores extremos* de f .

Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)

$f(a)$ mínimo absoluto

$f(d)$ máximo absoluto

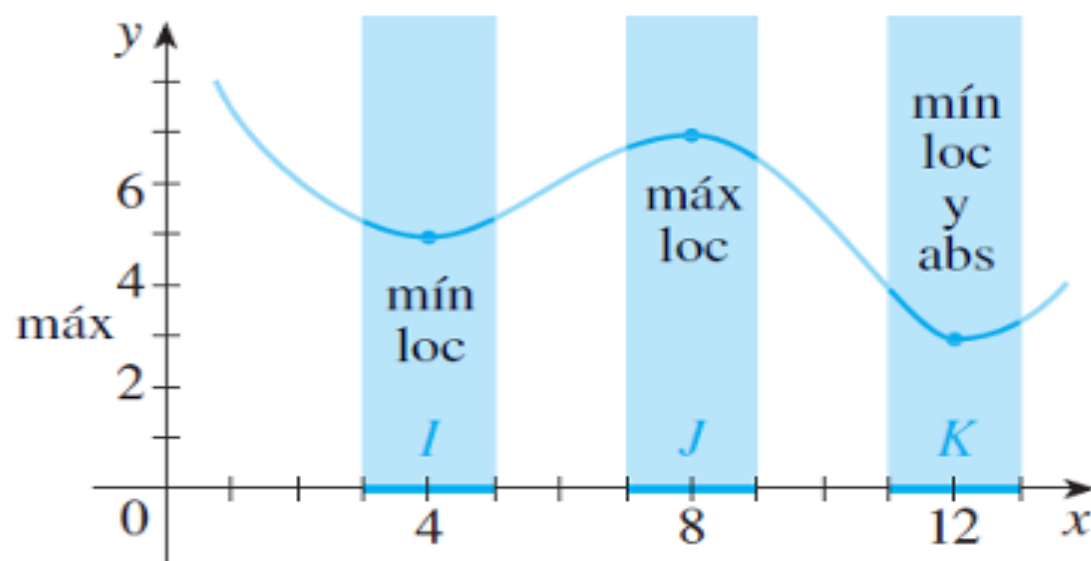


Valores extremos locales

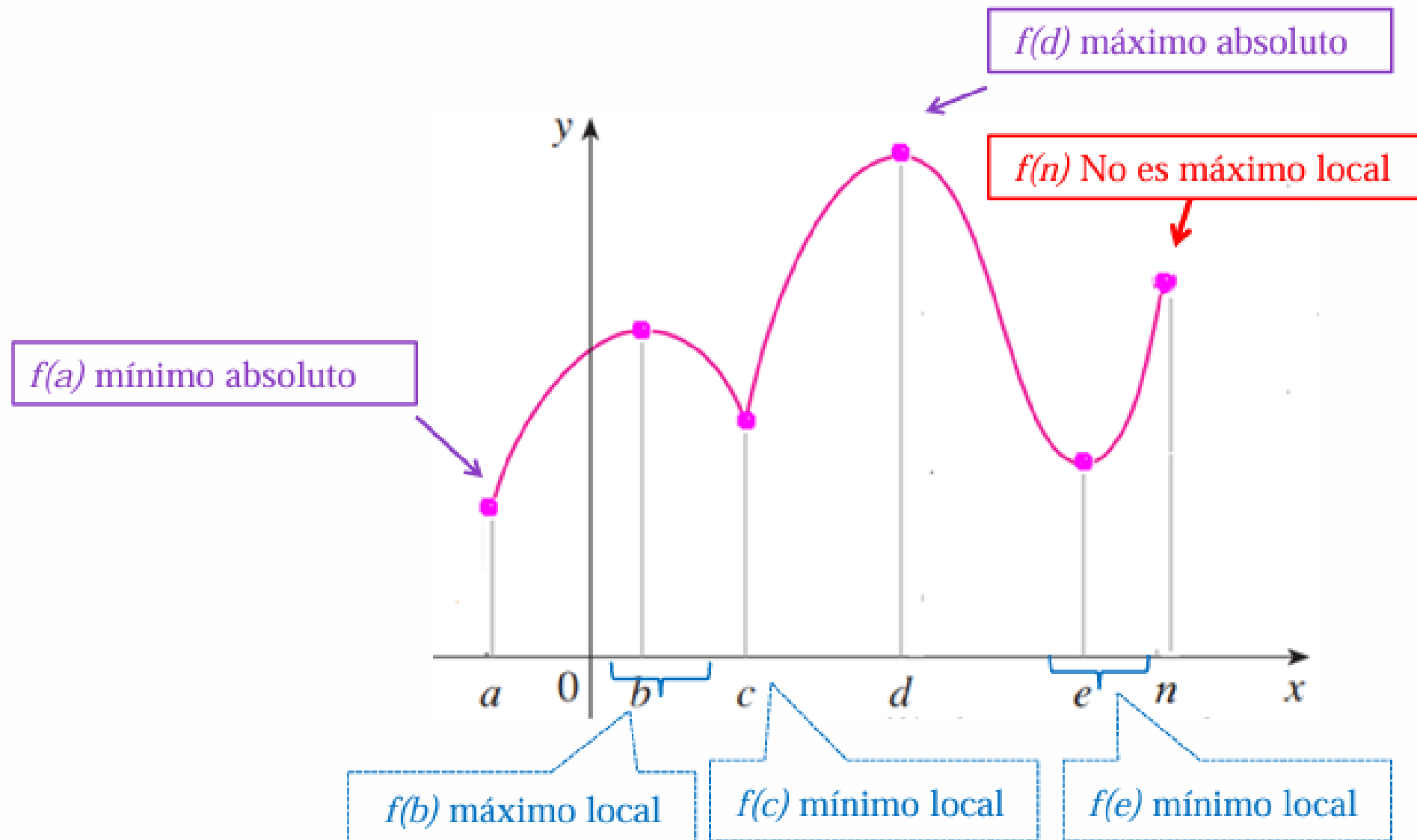
Definición .

El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cerca de c .
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c .



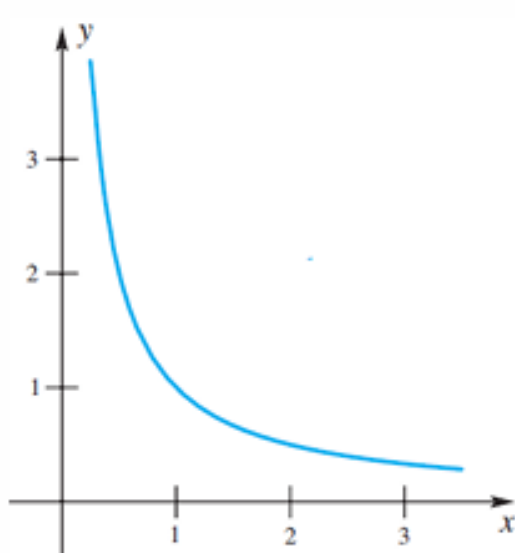
Valores extremos (Valor máximo – Valor mínimo)



Valores extremos

¿ f tiene un valor mínimo o máximo en el intervalo D ?

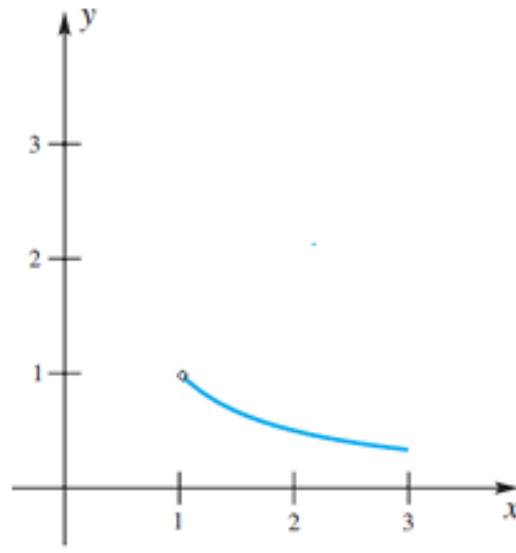
Sea la función $f(x) = 1/x$



En D : $(0, \infty)$

No tiene valor máximo.

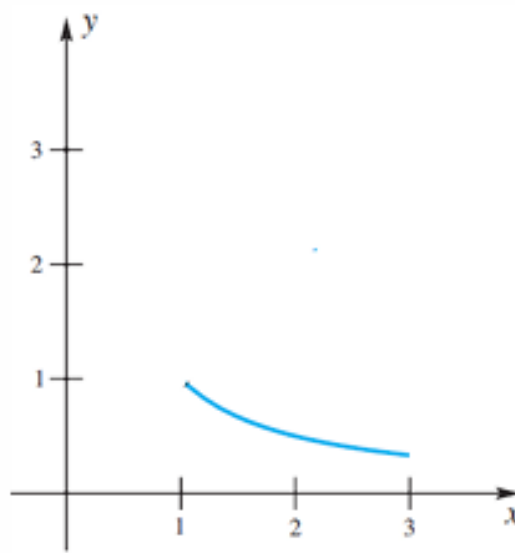
No tiene valor mínimo.



En D : $(1, 3]$

No tiene valor máximo.

Tiene valor mínimo, $1/3$



En D : $[1, 3]$

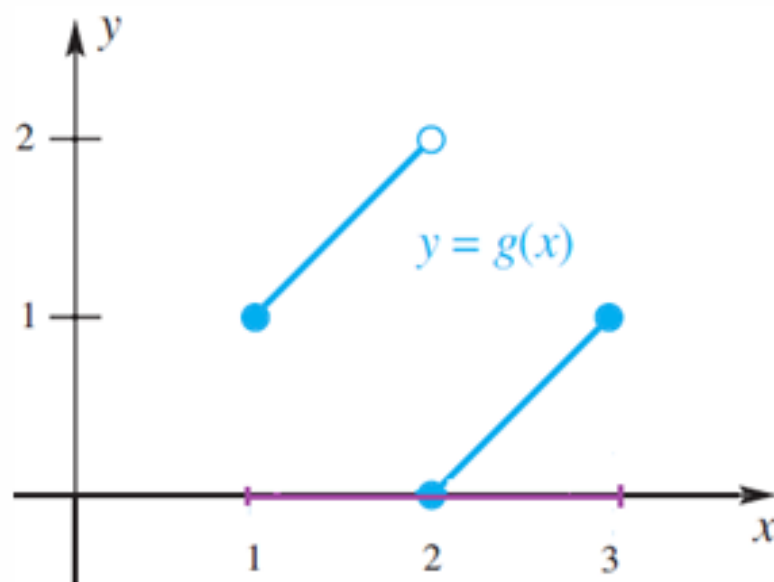
Tiene valor máximo, 1.

Tiene valor mínimo, $1/3$.

Valores extremos

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



En D: $[1, 3]$

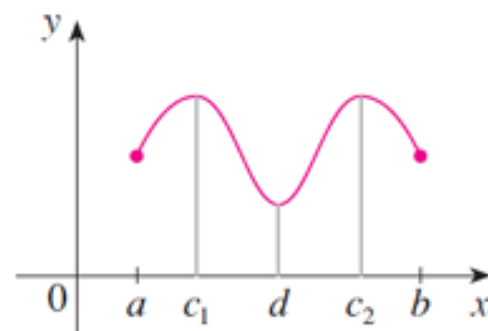
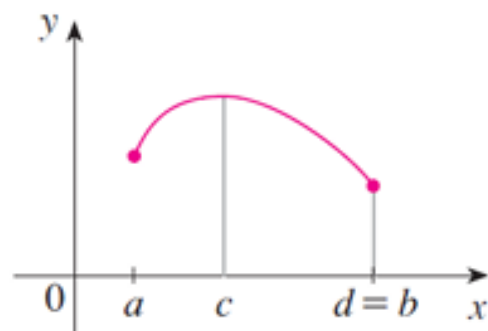
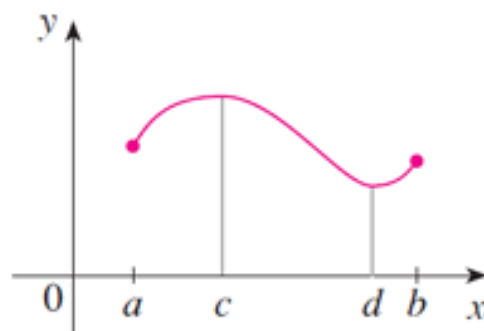
f no tiene valor máximo.

f tiene valor mínimo, 0.

Teorema del valor extremo

Teorema del valor extremo

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor **máximo absoluto** $f(c)$ y un valor **mínimo absoluto** $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

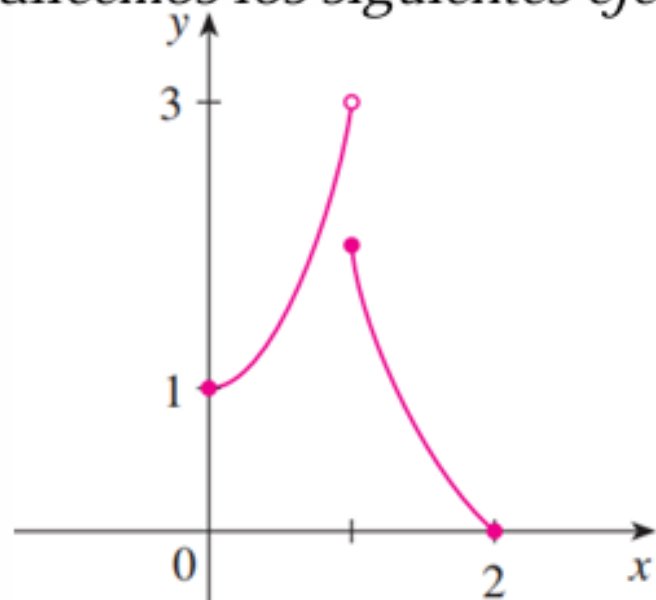


Teorema del valor extremo

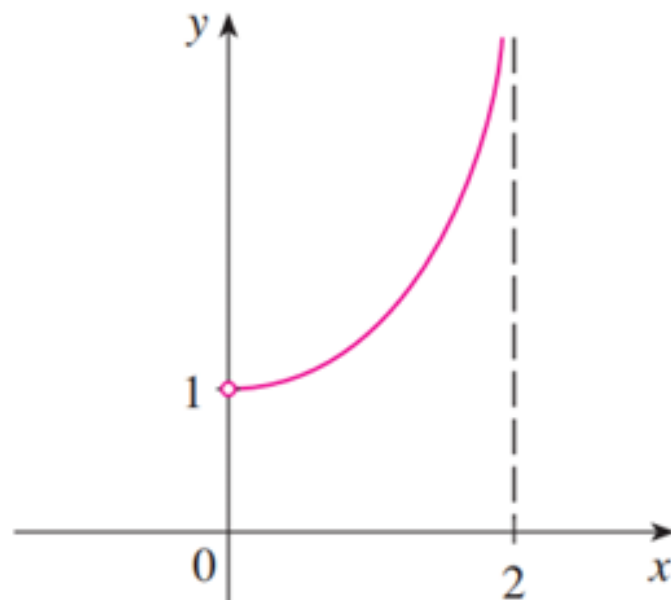
Hipótesis f es *continua* sobre un *intervalo cerrado* $[a, b]$,

Tesis f alcanza un valor *máximo absoluto* y
un valor *mínimo absoluto* en algunos números en $[a, b]$.

Analicemos los siguientes ejemplos



Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

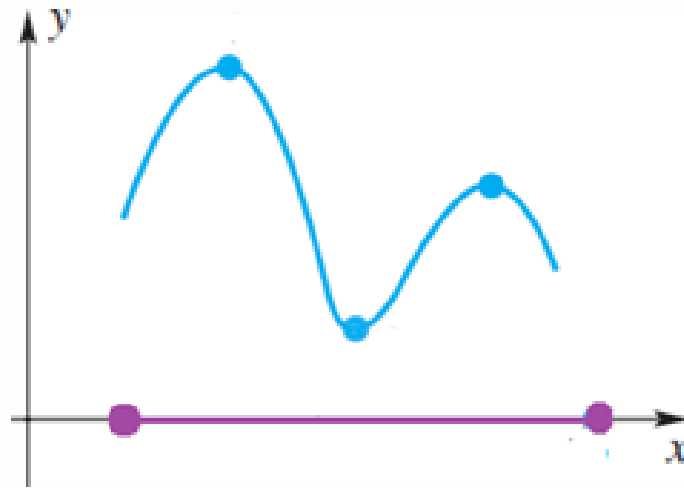


Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

Los ejemplos **no contradicen** el Teorema porque **No** verifican las hipótesis

Valores extremos

¿ Dónde se presentan los valores extremos en un cerrado?



Teorema de Fermat:

Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$ y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$

DEMOSTRACIÓN Para la consideración de la conclusión, suponga que f tiene un máximo local en $x = c$. Entonces, según la definición 2, $f(c) \geq f(x)$ si x es suficientemente cercana a c . Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0 y es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geq f(c + h)$$

y, por consiguiente,

$$\boxed{5} \quad f(c + h) - f(c) \leq 0$$

Podemos dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tenemos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leq 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad [5] se invierte cuando dividimos por h :

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Ya hemos mostrado que $f'(c) \geq 0$ y también que $f'(c) \leq 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Valores extremos

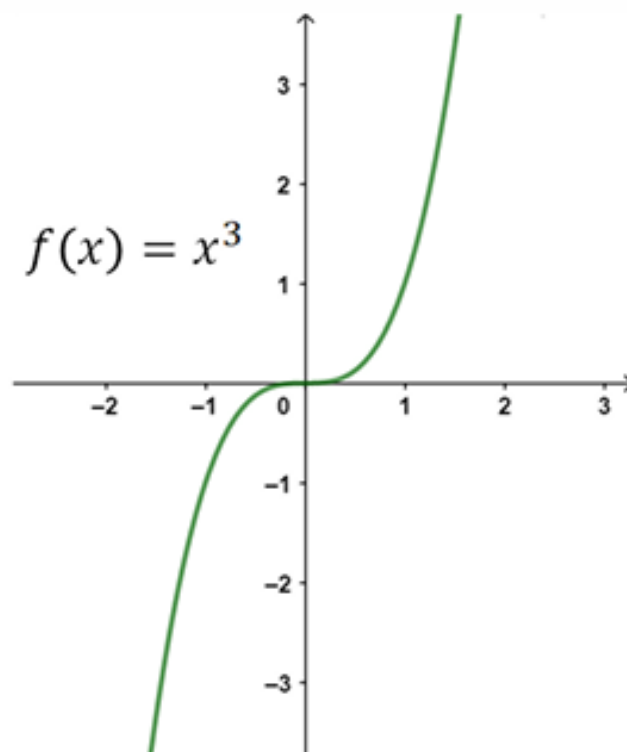
¿ Si $f'(c) = 0$, entonces hay máximo o un mínimo en $x = c$?

Sea $f(x) = x^3$

Observemos que:

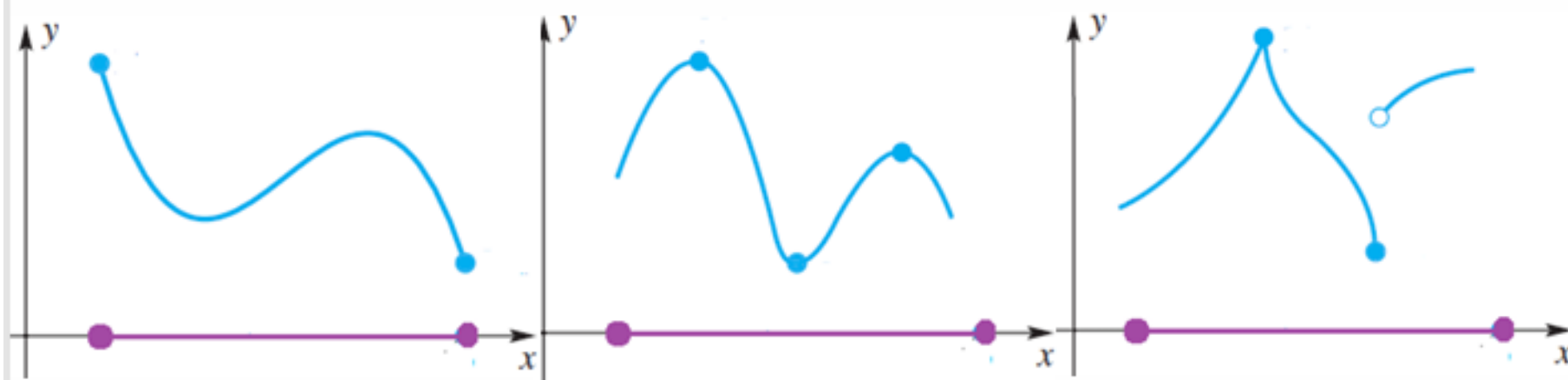
$$f'(x) = 3x^2 \text{ y } f'(0) = 3(0)^2 = 0$$

pero en $x = 0$ *no hay ni máximo ni un mínimo.*



Valores extremos

¿ Dónde se presentan los valores extremos en un cerrado?



Puntos extremos del
intervalo

Puntos estacionarios

Puntos singulares

Definición:

Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Valores extremos

Cálculo de extremos en un intervalo cerrado.

Para hallar los valores máximo y mínimo ***absolutos*** de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los número críticos de f en (a,b) .
2. Halle los valores de f en los número críticos.
3. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
4. El valor más grande es el ***máximo absoluto*** y el valor más chico el ***mínimo absoluto***.

Teorema del valor extremo

Hipótesis f es *continua* sobre un *intervalo cerrado* $[a, b]$,

Tesis f alcanza un valor *máximo absoluto* y un valor *mínimo absoluto* en algunos números en $[a, b]$.

Ejemplo:

Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en $[-1/2, 2]$

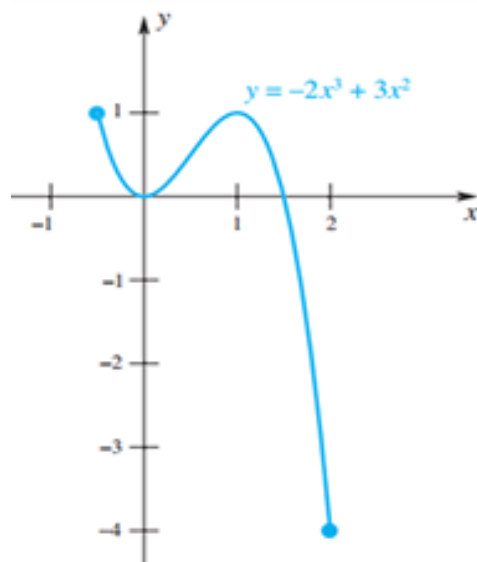
Solución:

Vemos si se verifican las Hipótesis del Teorema del valor extremo. La función $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ es una función continua en el intervalo cerrado $[-1/2, 2]$ porque es una función polinómica, por lo tanto alcanza valor máximo y mínimo absolutos

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x - 1)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ los números críticos son: 0 y 1.

Evalúo f en los valores críticos y en los extremos del intervalo



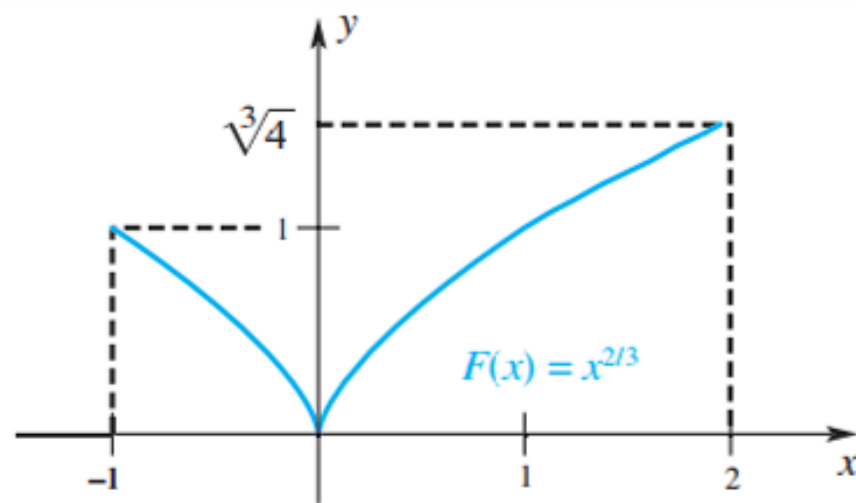
Cálculo de extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. $[a, b]$:

1. Encuentre los números críticos de f en (a, b) .
2. Halle los valores de f en los números críticos.
3. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
4. El valor más grande es el *máximo absoluto* y el valor más chico el *mínimo absoluto*.

Valores extremos

Ejemplo:

Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^{2/3}$ en $[-1, 2]$.



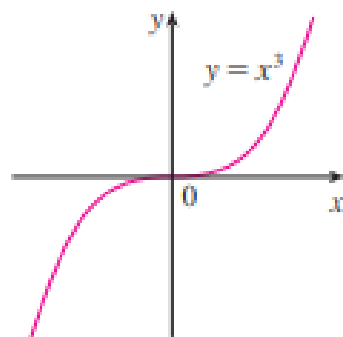


FIGURA 11

Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

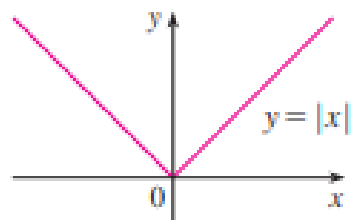


FIGURA 12

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en $x = 0$, como puede ver en la gráfica de la figura 11. (O bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en $(0, 0)$. En lugar de tener un máximo o un mínimo en $(0, 0)$, allí cruza la curva su recta tangente horizontal.

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no puede determinarse haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase la figura 12).

⚠ **PRECAUCIÓN** Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en $x = c$. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, debe *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números $x = c$, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

Teorema de Rolle Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

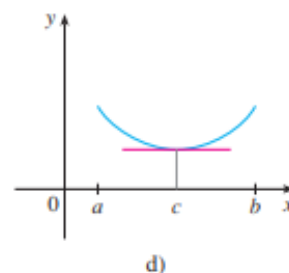
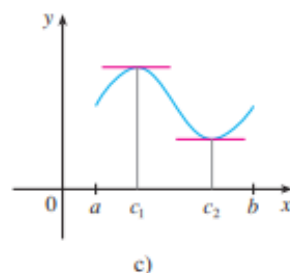
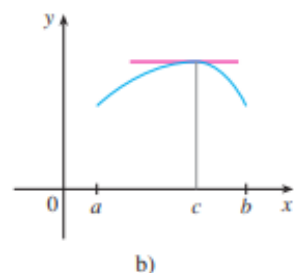
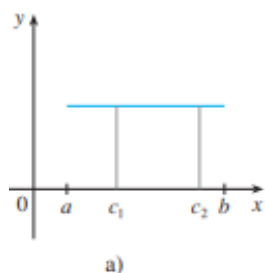
1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, vamos a echar un vistazo a las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por consiguiente, el teorema de Rolle es verosímil.



CASO I $f(x) = k$, una constante

Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el número c puede tomar *cualquier* número en (a, b) .

CASO II $f(x) > f(a)$ para alguna x en (a, b) [como en la figura 1b) o c)]

Por el teorema del valor extremo (que podemos aplicar por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Ya que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar este valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b) , entonces f tiene un máximo *local* en c y, por la hipótesis 2, f es derivable en c . Por tanto, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ para algún x en (a, b) [como en la figura 1c) o d)]

Por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, como $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número $x = c$ en (a, b) . Otra vez, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

EJEMPLO 1 Vamos a aplicar el teorema de Rolle a la función posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle señala que hay algún instante de tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, puede verse que esto es cierto cuando se lanza una bola directamente hacia arriba.) ■

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

SOLUCIÓN Primero utilizamos el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Entonces $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$.

Dado que f es una función polinomial, es continua, por lo que el teorema del valor intermedio establece que existe un número $x = c$ entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$, de lo que se deduce que la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otras raíces reales, utilizamos el teorema de Rolle y argumentamos por contradicción. Supongamos que tenemos dos raíces a y b . Entonces $f(a) = 0 = f(b)$ y, dado que f es una función polinomial, es derivable en (a, b) y continua sobre $[a, b]$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un número $x = c$ entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{para toda } x$$

(ya que $x^2 \geq 0$), por lo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto conduce a una contradicción, por tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales. ■

El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el importante teorema siguiente, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph Louis Lagrange.

El teorema de Rolle muestra que no importa cuánto ampliemos el rectángulo de vista, nunca podremos encontrar una segunda intersección con el eje x .



Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

entonces existe un número $x = c$ en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{2} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, podemos ver que es razonable desde la interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

$$\boxed{3} \quad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Dado que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB . En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB (imagine una recta paralela a AB , moviéndose desde lejos manteniendo el paralelismo hasta que toque la gráfica por primera vez).

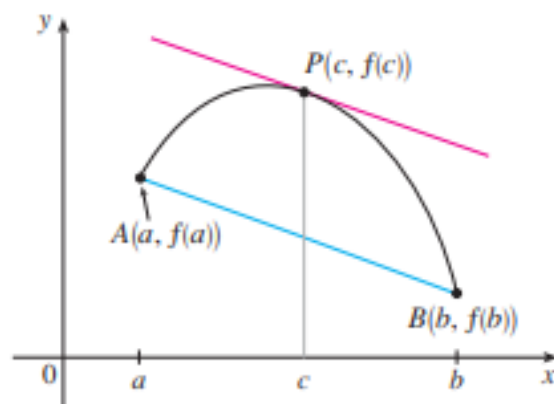


FIGURA 3

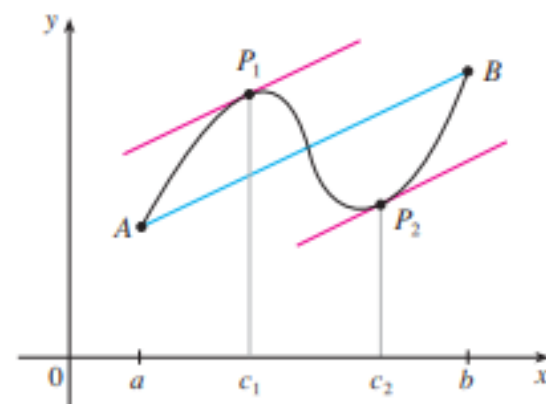


FIGURA 4

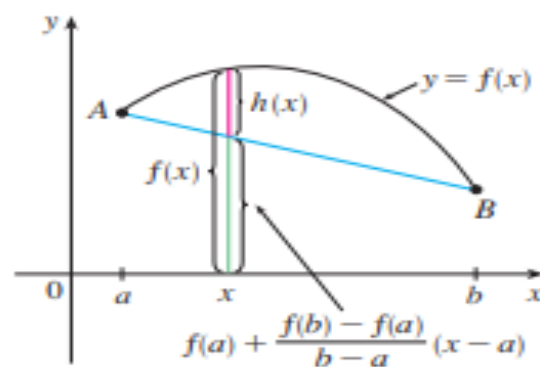


FIGURA 5

Lagrange y el teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue formulado primero por Joseph Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín a la tierna edad de 19 años. Lagrange hizo grandes contribuciones a la teoría de números, teoría de las funciones, teoría de las ecuaciones y a la mecánica celeste y analítica. En particular, aplicó el cálculo en el análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación a París del rey Luis XVI, donde recibió apartamentos en el Louvre y un cargo de profesor en la Escuela Politécnica. A pesar de todos los lujos y la fama, era un hombre tranquilo, viviendo sólo para la ciencia.

DEMOSTRACIÓN Aplicamos el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la recta secante AB . Mediante la ecuación 3, vemos que la ecuación de la recta AB puede escribirse como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

o como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Así, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \quad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Primero, debemos verificar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua sobre $[a, b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.
2. La función h es derivable sobre (a, b) porque f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular h' directamente de la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Note que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

$$\begin{aligned} 3. \quad h(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) \\ &= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $h(a) = h(b)$.

Dado que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, que señala que existe un número $x = c$ en (a, b) tal que $h'(c) = 0$, entonces se tiene

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

así que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x , así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

V EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x , así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en $(0, 2)$, así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB .

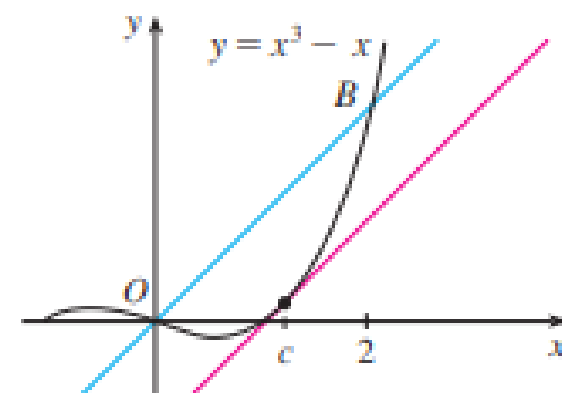


FIGURA 6

V EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x . ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Partimos del hecho de que f es derivable (y, por tanto, continua) en todo su dominio. En particular, podemos aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Existe un número $x = c$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

así que
$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

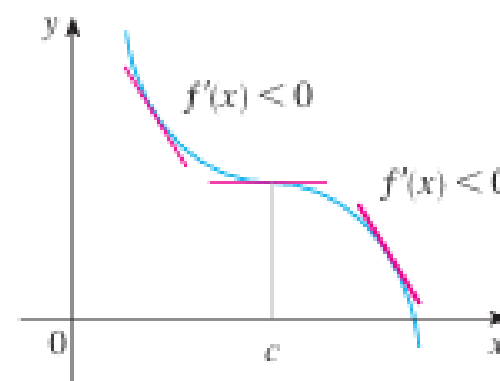
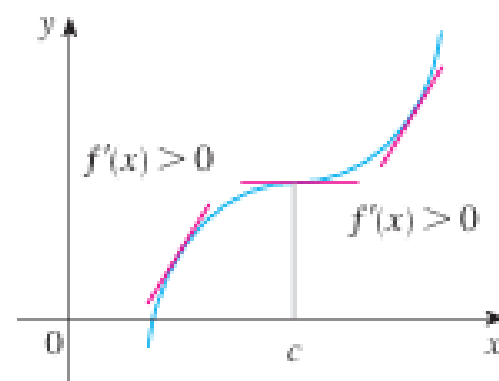
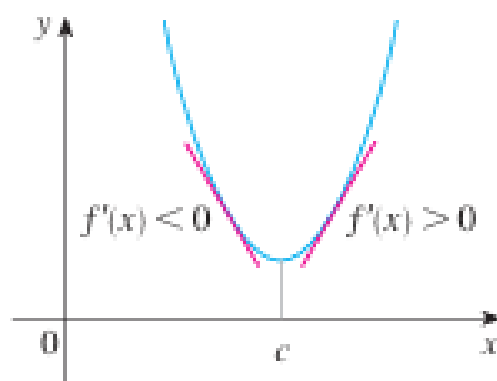
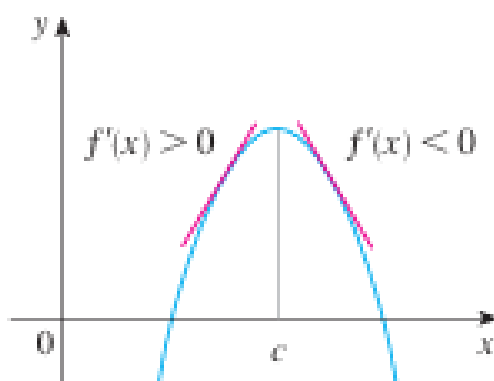
Tenemos que $f'(x) \leq 5$ para toda x , así que, en particular, sabemos que $f'(c) \leq 5$. Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2, tenemos $2f'(c) \leq 10$, así que

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

El mayor valor posible para $f(2)$ es 7.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f .

- a) Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .
- b) Si f' cambia de negativo a positivo en c , entonces f tiene un mínimo local en c .
- c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c .



EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los números críticos de g , derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Así que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Debido a que g es derivable para toda x , los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$, así que podemos analizar a g en la siguiente tabla.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2 \cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente sobre $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	-	decreciente sobre $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente sobre $(4\pi/3, 2\pi)$

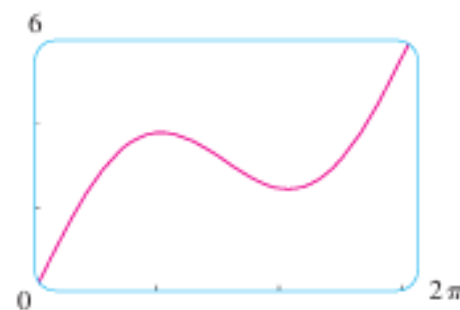
Ya que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos indica que existe un máximo local en $x = 2\pi/3$ y el máximo valor local es

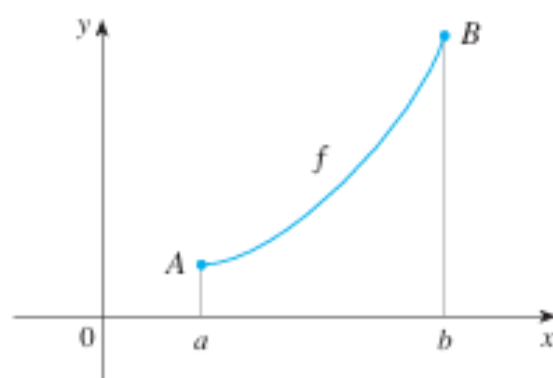
$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Por otro lado, $g'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x = 4\pi/3$ y, por tanto,

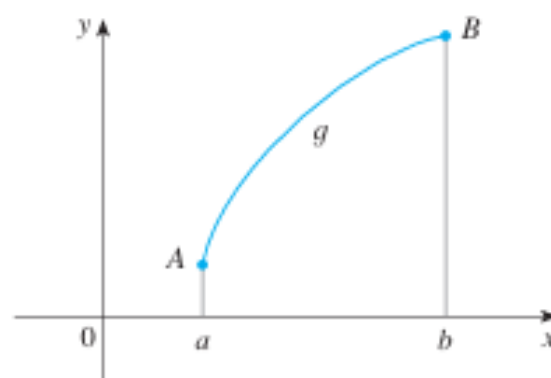
$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya nuestra conclusión.

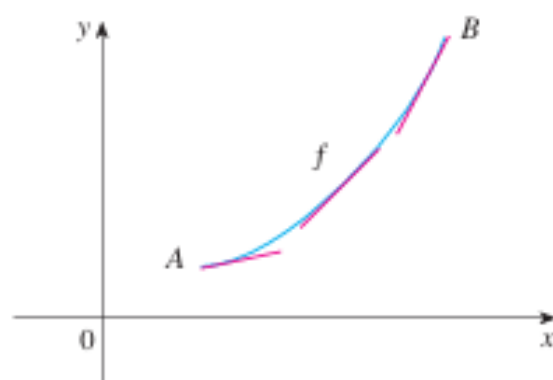




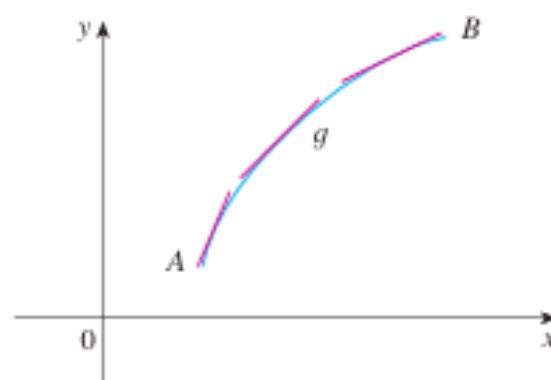
a)



b)



a) Cóncava hacia arriba

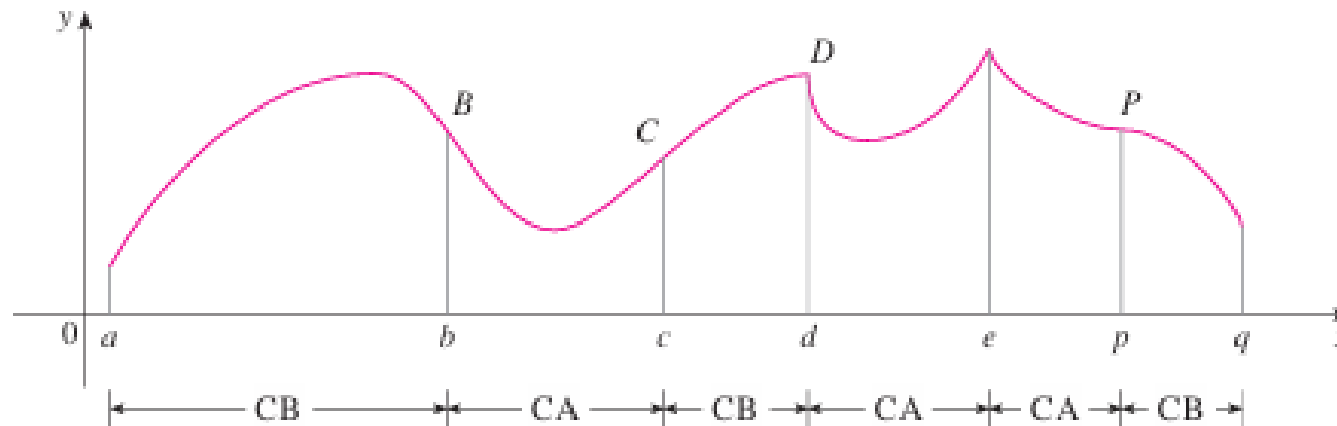


b) Cóncava hacia abajo

Definición Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I , entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I . Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I .

Prueba de concavidad

- a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I , entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I .
- b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I , entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I .



Por ejemplo, en la figura 7, B , C , D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta a la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para los valores máximos y mínimos, que no es más que una consecuencia de la prueba de concavidad.

Prueba de la segunda derivada Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.

b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

V EJEMPLO 6 Discuta la curva $y = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Utilice esta información para esbozar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrar los números críticos establecemos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$ y $x = 3$. Para utilizar la prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Ya que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no aporta información sobre el número crítico $x = 0$. Pero ya que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada nos dice que f no tiene un máximo o mínimo local en 0. [De hecho, la expresión para $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.]

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 2$, dividimos la recta real en intervalos con estos números como extremos y completamos la siguiente tabla.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	+	hacia arriba
$(0, 2)$	-	hacia abajo
$(2, \infty)$	+	hacia arriba

