
Guía Teórica: Integral Indefinida

1. Concepto de integral indefinida

La derivada de una función permite conocer la tasa de variación (el cambio instantáneo) de un determinado fenómeno a partir de su función. Con la integración, el proceso es inverso: se trata de conocer la función inicial a partir de su derivada: partiendo del estudio de la variación de un fenómeno, llegar a conocer la función que lo explica.

1.1. Primitiva de una función

Si se conoce una función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x) \rightarrow$ Se aplican las fórmulas. El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama integración.

$$F(x) \rightarrow (\text{derivación}) \rightarrow F'(x) = f(x) \rightarrow (\text{integración}) \rightarrow F(x)$$

A la función $F(x)$ se le llama primitiva o antiderivada de la función $f(x)$. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplo :

a) Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces, una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.

Observación:

Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando:

$F'(x) = (x^2 + 3x + 14)' = 2x + 3 = f(x)$. Todas las funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + c$, donde c es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$.

b) Si $F(x) = \ln(3x + 1)$, su derivada es $F'(x) = \frac{3}{3x+1}$; en consecuencia, una primitiva de

$f(x) = \frac{3}{3x+1}$ será $F(x) = \ln(3x + 1)$.

$\rightarrow$ Todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x + 1) + c$ son primitivas de $f(x) = \frac{3}{3x+1}$.

1.2. Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x) + c$, donde c es un número que se llama constante de integración. Se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ (} dx \text{ indica la variable de integración; de derivación).}$$

En consecuencia, la derivada y la integral son “operaciones” inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x) \quad \text{y} \quad \int \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) dx = f(x)$$

En la segunda igualdad debería sumarse una constante. No se hace para que quede más clara la idea fundamental.

Ejemplos:

- a) $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + c) = 2x + 3$.
- b) $\int \frac{3}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}(\ln(3x+1) + c) = \frac{3}{3x+1}$.
- c) $\int 4x^3 dx = x^4 + c$, pues $\frac{d}{dx}(x^4 + c) = 4x^3$.

1.3. Propiedades de la integral indefinida

1) La integral de un número por una función es igual al número por la integral de la función:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Esto significa que los números que multiplican a una función pueden *entrar y salir* del integrando, según convenga. Así, por ejemplo: $\int f(x)dx = \frac{1}{k} \int kf(x)dx = k \int \frac{f(x)}{k} dx$.

Esta propiedad facilita el cálculo de integrales mediante el sencillo procedimiento de ajustar constantes.

Ejemplos:

a) Para hallar $\int 8x^3 dx$ puede verse el ejemplo c) anterior y escribir:

$$\int 8x^3 dx = \int 2 \cdot 4x^3 dx = 2 \left(\int 4x^3 dx \right) = 2(x^4 + c) = 2x^4 + c' \rightarrow \text{(puede sustituirse } c' \text{ por } c).$$

b) Obsérvese con un caso particular lo que se ha dicho más arriba sobre que la integral y la derivada son “operaciones” inversas:

→ Primero se deriva, después se integra:

$$\int \left(\frac{d}{dx}(4x^3) \right) = \int (12x^2) dx = \int (4 \cdot 3x^2) dx = 4 \int 3x^2 dx = 4x^3 + c \text{ (Se escribe la constante } c).$$

→ Primero se integra, después se deriva: $\frac{d}{dx} \left(\int (4x^3) dx \right) = \frac{d}{dx}(x^4 + c) = 4x^3 \rightarrow \text{No hay } c.$

2) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Las propiedades 1) y 2) indican que la integral se comporta como un *operador lineal*.

Ejemplos:

a) Número por función:

$$\rightarrow \int 5(2x+3)dx = 5 \int (2x+3)dx = 5(x^2 + 3x + c) = 5x^2 + 15x + c' \text{ (da igual poner } c \text{ que } c').$$

$$\rightarrow \int \frac{2x+3}{4}dx = \frac{1}{4} \int (2x+3)dx = \frac{1}{4}(x^2 + 3x + c) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + c.$$

OJO: Esta propiedad solo se refiere a factores numéricos. Así: $\int x(2x+3)dx \neq x \int (2x+3)dx$.

b) Para hallar $\int 3x^3 dx$ se escribe:

$$\int 3x^3 dx = \int 3 \left(\frac{1}{4} \cdot 4 \right) x^3 dx = 3 \cdot \frac{1}{4} \left(\int 4x^3 dx \right) = \frac{3}{4} (x^4 + c) = \frac{3}{4} x^4 + c \rightarrow \text{(se deja la misma } c).$$

c) Suma de funciones:

$$\int (4x^3 - 2x)dx = \int 4x^3 dx - \int 2x dx = (x^4 + c_1) - (x^2 + c_2) = x^4 - x^2 + c \text{ (las constantes } c_1 \text{ y } c_2 \text{ no son necesarias; basta con poner una sola } c).$$

d) Sabiendo que $\int \cos x dx = \sin x + c$ y que $\int e^x dx = e^x + c$ (recuerda las derivadas de la función seno y de la exponencial), se obtienen:

$$\rightarrow \int k \cos x dx = k \sin x + c \Rightarrow \int (-3 \cos x) dx = -3 \sin x + c.$$

$$\rightarrow \int \frac{\cos x}{k} dx = \frac{\sin x}{k} + c \Rightarrow \int \frac{\cos x}{5} dx = \frac{1}{5} \sin x + c.$$

$$\rightarrow \int p e^x dx = p e^x + c \Rightarrow \int 2 e^x dx = 2 e^x + c; \int \frac{1}{5} e^x dx = \int \frac{e^x}{5} dx = \int \frac{e^x dx}{5} = \frac{1}{5} e^x + c.$$

$$\rightarrow \int (3 \cos x - 2 e^x) dx = 3 \int \cos x dx - 2 \int e^x dx = 3 \sin x - 2 e^x + c.$$

• Las propiedades anteriores se utilizan según convenga, de dentro a fuera o de fuera a dentro. Así, por ejemplo:

$$18 \int \frac{1}{3x+1} dx = 6 \cdot 3 \int \frac{1}{3x+1} dx = 6 \int \frac{3}{3x+1} dx = 6 (\ln(3x+1) + c) = 6 \ln(3x+1) + c.$$

Siempre se buscará un integrando del que se sepa hallar la primitiva.

Igualmente:

$$8 \int (x^3 - x) dx = 8 \int x^3 dx - 8 \int x dx = 2 \int 4x^3 dx - 4 \int 2x dx = 2x^4 - 4x^2 + c.$$

La integral indefinida puede ser inmediata o resolverse por unos de los siguientes métodos de integración

2. INTEGRALES INMEDIATAS

Se realiza aplicando directamente la tabla y haciendo operaciones algebraicas que sean necesarias.

Ver la tabla de Integrales Inmediatas que se adjunta

A partir de estas integrales inmediatas, se desarrollarán técnicas para obtener integrales indefinidas de funciones más complejas.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
Función simple	Función compuesta	Ejemplos
$\int k dx = kx$		$\int dx = x$; $\int (-4) dx = -4x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$; $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f}$	$\int \frac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x}} dx = \sqrt{5x^2-3x}$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f$	$\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln x$; $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \ln(x^3+1)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$	$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$; $\int 3^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{3^{x^2}}{\ln 3}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$	$\int e^{x^2} \cdot 2x dx = e^{x^2}$; $\int e^{-3x} (-3) dx = e^{-3x}$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$	$\int 5 \cos(5x-2) dx = \sin(5x-2)$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$	$\int 6x^2 \sin(2x^3) dx = -\cos(2x^3)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$	$\int \frac{4}{\cos^2 4x} dx = \tan 4x$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int (1 + \tan^2 f) \cdot f' dx = \tan f$	$\int (1 + \tan^2(3x+2)) \cdot 3 dx = \tan(3x+2)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$	$\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \arcsin(\ln x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$	$\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arccos e^x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$	$\int \frac{4}{1+(4x)^2} dx = \arctan 4x$

(Para agilizar la escritura, y por falta de espacio, cuando en la función compuesta se escribe f debería escribirse $f(x)$; por lo mismo, en todos los casos se omite la constante de integración, c).

Ejemplos:

- a) $\int (3+x)^4 dx = \frac{(3+x)^5}{5} + c$. b) $\int (2x-3)e^{x^2-3x} dx = e^{x^2-3x} + c$.
- c) $\int (2x^3-1)^5 \cdot 6x^2 dx = \frac{(2x^3-1)^6}{6} + c$. d) $\int \frac{2x}{x^2+6} dx = \ln(x^2+6) + c$.
- e) $\int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c \rightarrow$ Observa: $\int f^2 \cdot f' dx = \frac{f^3}{3}$, con $f = \sin x$.

3. Técnicas y métodos de integración

Cuando el cálculo de una integral no sea inmediato, lo que sucede cuando el integrando no coincide con alguna de las fórmulas anteriores, se recurrirá a algún método de integración. Estos métodos son procedimientos que permiten escribir el integrando inicial en otro equivalente cuya integral sea más sencilla de calcular.

3.1. Descomposición elemental

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas... (Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral).

Ejemplos:

a) $\int (6x^2 + 5x - 1) dx \rightarrow$ Se descompone en suma de integrales.

$$\int (6x^2 + 5x - 1) dx = 2 \int 3x^2 dx + \frac{5}{2} \int 2x dx - \int dx = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c.$$

b) $\int (x^2 - 3)^2 dx \rightarrow$ Se hace el cuadrado de la expresión.

$$\int (x^2 - 3)^2 dx = \int (x^4 - 6x^2 + 9) dx = \int x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 9 dx = \frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + c.$$

c) $\int \frac{5x^2 + 4x - 3}{x^2} dx \rightarrow$ Se hace la división del integrando.

$$\int \frac{5x^2 + 4x - 3}{x^2} dx = \int \left(5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx = \int 5 dx + 4 \int \frac{1}{x} dx - 3 \int x^{-2} dx = 5x + 4 \ln x + \frac{3}{x} + c.$$

d) $\int \frac{4}{5-6x} dx \rightarrow$ Se ajustan las constantes buscando la integral del logaritmo: $\int \frac{-6}{5-6x} dx$.

$$\int \frac{4}{5-6x} dx = 4 \cdot \frac{-1}{6} \int \frac{-6}{5-6x} dx = -\frac{4}{6} \ln(5-6x) + c.$$

3.2. Ejercicios de integración por descomposición elemental

Ejercicio 1. Calcula la integral $\int 6x(x^2 + 4)^2 dx$ del siguiente modo:

1) Operando el integrando; 2) Ajustando constantes y aplicando la fórmula $\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$.

Solución:

1) Operando se tiene:

$$\begin{aligned} \int 6x(x^2 + 4)^2 dx &= \int 6x(x^4 + 8x^2 + 16) dx = \int (6x^5 + 48x^3 + 96x) dx = \\ &= \int 6x^5 dx + \int 48x^3 dx + \int 96x dx = x^6 + 12 \int 4x^3 dx + 48 \int 2x dx = x^6 + 12x^4 + 48x^2 + c. \end{aligned}$$

2) Ajustando constantes:

$$\int 6x(x^2 + 4)^2 dx = 3 \int 2x(x^2 + 4)^2 dx = \left(3 \int f' \cdot f^2 dx = 3 \cdot \frac{f^3}{3} \right) = 3 \cdot \frac{(x^2 + 4)^3}{3} + c = (x^2 + 4)^3 + c$$

Ejercicio 2. Calcula ajustando constantes las integrales: a) $\int \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}} dx$; b) $\int \frac{5x}{2(x^2+1)} dx$

Solución:

Hay que saberse las integrales:

$$\text{a) } \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c; \quad \text{b) } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + c.$$

Con esto:

a) Como la derivada del radicando, $f(x) = x^2 + 1$, es $f'(x) = 2x$, la integral inicial puede escribirse e integrarse como sigue:

$$\int \frac{5x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x)}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{5}{2} \sqrt{x^2+1} + c.$$

b) Como en el caso a), al ser $f'(x) = 2x$, la integral inicial es:

$$\int \frac{5x}{2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{5}{2}(2x)}{(x^2+1)} dx = \frac{5}{4} \int \frac{2x}{(x^2+1)} dx = \frac{5}{4} \ln(x^2+1) + c.$$

4. Integración por cambio de variable

Aunque la descomposición elemental (el ajuste de constantes) suele dar resultado en muchos casos, no siempre es sencillo, pues hay veces que no se ve lo que puede hacerse. Por eso, un método alternativo y válido para casos más complicados es el del cambio de variable.

Este método consiste en hacer un cambio de variable en el integrando ($x = g(t)$ o $t = h(x)$, según convenga) de manera que la integral inicial resulte más fácil de calcular.

El proceso es el siguiente:

Para calcular la integral $\int f(x) dx$, si se hace $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt$.

Con esto, puede escribirse: $\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$.

Aunque, aparentemente, está integral se vea más difícil, de lo que se trata es de que la nueva integral resulte casi inmediata: que se ajuste a alguna de las fórmulas de integración.

Muchas veces no se consigue, pues el cambio puede ser poco afortunado; en ese caso, habrá que hacer otro cambio. (A este nivel, suele indicarse el cambio adecuado).

→ Tres cosas más:

- 1) El cambio también afecta a la dx . Ya se ha indicado arriba: $dx = g'(t) dt$.
- 2) Casi siempre habrá que recurrir a algún ajuste de constantes en algún momento del proceso.
- 3) Una vez resuelta la integral en la variable t hay que deshacer el cambio inicial, pues la solución debe darse en función de x .

Ejemplos:

a) Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse el cambio: $t = 2x-3$.

Luego: $t^5 = (2x-3)^5$; $dt = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Sustituyendo en la integral inicial:

$$\int (2x-3)^5 dx = \int t^5 \left(\frac{1}{2} dt \right) = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{12} t^6 + c = \frac{1}{12} (2x-3)^6 + c.$$

b) Para calcular $\int e^{4x} dx$, si se hace: $u = 4x \Rightarrow du = 4dx \rightarrow dx = \frac{1}{4} du$.

Sustituyendo los cambios se tiene: $\int e^{4x} dx = \int e^u \cdot \left(\frac{1}{4} du \right) = \frac{1}{4} \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + c = \frac{1}{4} e^{4x} + c$.

c) La integral $\int \frac{4}{5-6x} dx$, hecha anteriormente mediante ajuste de constantes, se puede

resolver haciendo el cambio: $t = 5-6x \Rightarrow dt = -6dx \rightarrow dx = -\frac{1}{6} dt$.

$$\text{Luego, } \int \frac{4}{5-6x} dx = \int \frac{4}{t} \left(-\frac{1}{6} dt \right) = -\frac{4}{6} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{4}{6} \ln t + c = -\frac{4}{6} \ln(5-6x) + c.$$

Observación: En ninguno de los casos anteriores es imprescindible cambiar de variable. Así, en el ejemplo a), puede hacerse:

$$\int (2x-3)^5 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x-3)^5 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^6}{6} + c = \frac{1}{12} (2x-3)^6 + c.$$

4.1. Algunos cambios de variable estándar

Como ya se ha indicado, es frecuente que se indique un cambio adecuado. De hecho, estos cambios se pueden generalizar para distintos tipos de integrales. Aquí, para practicar el método, se darán los cambios.

Ejercicio 1

Halla, mediante el cambio $\sqrt{1+x} = u$, la integral $\int x\sqrt{1+x} dx$.

(Observa que con este cambio puede evitarse la raíz cuadrada).

Solución:

Si $\sqrt{1+x} = u \Rightarrow 1+x = u^2 \Rightarrow x = u^2 - 1$; $dx = 2u du$.

Llevando estos valores al integrando, resulta:

$$\int x\sqrt{1+x} dx = \int (u^2 - 1)u(2u du) = \int (2u^4 - 2u^2) du = 2 \int u^4 du - 2 \int u^2 du = \frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + c.$$

Deshaciendo el cambio, $u = \sqrt{1+x}$, se tendrá

$$\int x\sqrt{1+x} dx = \frac{2}{5} \sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} + c.$$

Ejercicio 2

Calcula, mediante el cambio $e^x = t$, la integral $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$.

Solución:

Si $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx = \int \frac{1}{2+t} e^x dx = \int \frac{1}{2+t} dt = \ln(2+t) + c = \ln(2+e^x) + c$.

Ejercicio 3

Calcula, haciendo el cambio $\sin x = t$, la integral $\int (\sin^2 x) \cdot \cos x dx$.

Solución:

Si $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$.

Sustituyendo: $\int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(\sin x)^3}{3} + c$.

5. Integración de fracciones racionales

Las fracciones racionales son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el denominador es de grado menor o igual que el numerador, la expresión anterior puede escribirse así: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ y $R(x)$ son, respectivamente, el cociente y el resto de la división. (Como debe saberse, el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$)

Con esto: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

Aquí estudiaremos solo dos casos:

1) cuando $Q(x)$ es de primer grado: $\int \frac{P(x)}{ax+b} dx$.

2) cuando $Q(x)$ es de segundo grado: $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx$.

5.1. Fracciones racionales con denominador de primer grado: $Q(x) = ax + b$

La descomposición se hace dividiendo.

La división de $P(x):(ax+b)$ puede hacerse por cualquier método; así, por ejemplo, si $a = 1$, se hace aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplos:

a) La expresión $\frac{x^2-3x+4}{x}$ puede escribirse como suma de fracciones dividiendo cada

término del numerador por x : $\frac{x^2-3x+4}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{4}{x} = x - 3 + \frac{4}{x}$.

Con esto:

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x} \right) dx = \int x dx - \int 3 dx + \int \frac{4}{x} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln x + c.$$

b) La expresión $\frac{2x^3-3x+2}{x+1} = 2x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+1}$. Esta descomposición se obtiene dividiendo por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ & & -2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 3 \end{array} \rightarrow \text{El cociente de la división es } C(x) = 2x^2 - 2x - 1; \text{ el resto, } r = 3.$$

Con esto, la integral $\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1} dx$ se hace como sigue:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3-3x+2}{x+1} dx &= \int \left(2x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+1} \right) dx = (\text{descomponiendo en sumas de integrales}) \\ &= \int 2x^2 dx - \int 2x dx - \int dx + \int \frac{3}{x+1} dx = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 3\ln(x+1) + c. \end{aligned}$$

5.2. Fracciones racionales con denominador de segundo grado: $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Método de descomposición en fracciones simples

Si el numerador, $P(x)$, es de grado mayor o igual que 2, se hace la división, obteniéndose:

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = C(x) + \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx = \int C(x)dx + \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$$

La única integral que presenta dificultades es la segunda. Para resolverla se recurre al método de descomposición de la expresión $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ en suma de fracciones simples.

Este método presenta distintas opciones dependiendo de las raíces de $ax^2+bx+c=0$.

Caso 1. Si hay dos raíces reales simples: $x = x_1, x = x_2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

La descomposición que se hace es: $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}$.

Con esto:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx = \frac{A}{a} \ln(x-x_1) + B \ln(x-x_2) + c$$

Los valores de A y B se determinan por el llamado método de *identificación de coeficientes*.

Ejemplos:

a) Para hallar la integral $\int \frac{2x}{x^2+x-2} dx$ se procede así:

– Se hallan las raíces de $x^2+x-2=0$. Son $x=1$ y $x=-2$.

Por tanto, la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow 2x = A(x+2) + B(x-1).$$

El método de *identificación de coeficientes* consiste en igualar los coeficientes de los términos del mismo grado de ambos miembros de la igualdad. Esto es:

$$2x = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow 2x+0 = (A+B)x + 2A - B \Rightarrow \begin{cases} 2 = A+B \\ 0 = 2A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = 4/3 \end{cases}.$$

Con esto: $\int \frac{2x}{x^2+x-2} dx = \int \frac{2/3}{x-1} dx + \int \frac{4/3}{x+2} dx = \frac{2}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln(x+2) + c.$

b) Para calcular $\int \frac{x^2-7}{x^2+x-2} dx$, primero hay que dividir el integrando, obteniéndose:

$$\frac{x^2-7}{x^2+x-2} = \frac{(x^2+x-2) - x + 2 - 7}{x^2+x-2} = 1 + \frac{-x-5}{x^2+x-2}. \text{ (Se divide por cualquier método).}$$

Ahora se descompone la segunda fracción (las raíces son las de arriba: $x = 1$ y $x = -2$).

$$\frac{-x-5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow -x-5 = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2-7}{x^2+x-2} dx = \int \left(1 + \frac{-x-5}{x^2+x-2} \right) dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = x - 2 \ln(x-1) + \ln(x+2) + c$$

Caso 2. Si hay una sola raíz real doble, $x = x_1 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Se hace la descomposición: $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)^2} + \frac{B}{(x-x_1)}.$

Con esto: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)^2} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx = \frac{-A}{a(x-x_1)} + B \ln(x-x_2) + c.$

Ejemplos:

a) $\int \frac{x-2}{x^2+4x+4} dx.$

– La ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$ tiene una sola raíz doble, $x = -2$. Por tanto:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2} \Rightarrow x-2 = A+B(x+2).$$

Se identifican coeficientes:

$$x-2 = Bx + A + 2B \Rightarrow \begin{cases} 1 = B \\ -2 = A + 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = -4 \end{cases}.$$

Luego,

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+4} dx = \int \frac{-4}{(x+2)^2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{4}{x+2} + \ln(x+2) + c.$$

6. Método de integración por partes

Este método suele ser apropiado cuando en el integrando figuran funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas multiplicadas entre ellas o por expresiones polinómicas.

El método consiste en descomponer el integrando en dos partes: una de ellas se llama u; la otra, que se designa por dv, suele ser el mayor trozo (la mayor parte) del integrando que pueda integrarse fácilmente. Una vez integrada dv surgirá otra integral que deberá ser más sencilla que la inicial.

El esquema es el siguiente: $\int u dv = uv - \int v du$

Esta fórmula se obtiene a partir de la propiedad de la diferencial (de la derivada) del producto de dos funciones, $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Así:

$$d(f(x) \cdot g(x)) = d(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot d(g(x)) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

(Recuérdese que $df(x) = f'(x)dx$).

Despejando:

$$f(x)g'(x)dx = d(f(x) \cdot g(x)) - f'(x)g(x)dx.$$

Integrando, miembro a miembro, se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)dx &= \int d(f(x) \cdot g(x)) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

De manera esquemática:

$$d(uv) = d(u)v + u \cdot d(v) = vdu + u dv \Rightarrow u dv = d(uv) - vdu \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo:

a) Para integral $\int x(\sin x)dx$ pueden tomarse las siguientes partes:

$$(1) u = x \text{ y } dv = \sin x dx \Rightarrow du = dx; v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$(2) u = \sin x \text{ y } dv = x dx \Rightarrow du = \cos x dx; v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

$$(3) u = x \sin x \text{ y } dx = dv \Rightarrow du = (\sin x + x \cos x) dx; v = \int dx = x.$$

$$\text{Si se hace (1): } \int x(\sin x)dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

Si se hace (2): $\int x \sin x dx = \sin x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$. (La segunda integral es más complicada que la primera. Por tanto, esta partición no es acertada).

Si se hace (3): $\int x \sin x dx = x \sin x - \int x(\sin x + x \cos x) dx$. (También la segunda integral es más complicada que la inicial. Tampoco es acertada esta partición).

6.1. Ejemplos

Ejemplo a). Calcula la integral $\int x e^x dx$.

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$.

Se tiene: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$.

Ejemplo b). Halla $\int x^2 \ln x dx$.

Haciendo: $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Por tanto: $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$.

Bibliografía: - José María Martínez Mediano

- Apuntes de la catedra