Integral Indefinida

Tomamos una función *f(x)* continua en un intervalo $[a,b]$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

Supongamos que ahora lo que conocemos es $f'(x)$ y queremos la función *original o primitiva* que no conocemos.

$$f'(x) = 2x \rightarrow \int f'(x)dx = \int 2x dx$$

$$\boxed{= x^2 = f(x) \quad \text{Primitiva}}$$

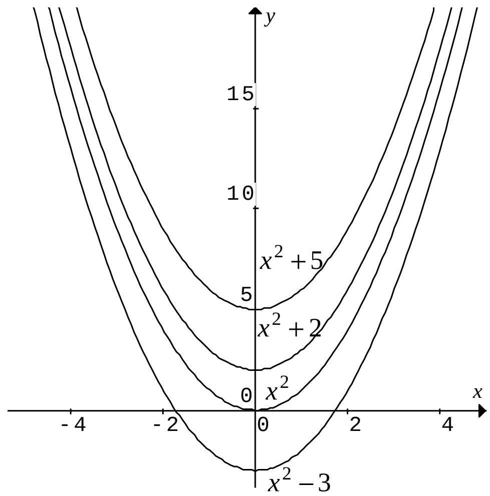
La función primitiva es la que se obtiene integrando. En realidad no se obtiene una sola función sino que son infinitas funciones, una familia que difieren en el valor de una constante que puede haber pertenecido a la función original pero no podemos saber en realidad cual era.

Ej:

$f(x) = x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = 2x$ $\qquad \int 2x dx = \boxed{x^2 + c}$

$f(x) = x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 2x$



Se dice que una función *F* es antiderivada de *f* en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo *x* en I.
Si *F* es una antiderivada de *f* en el intervalo I, entonces la antiderivada general de *f* en I es $F(x) + C$, donde *C* es una constante arbitraria.
Antiderivada es sinónimo de primitiva.

Definición
Si F es una función primitiva de *f*, se llama integral indefinida de *f* a la expresión $\int f(x)dx = F(x) + C$

f es la función integrando; $f(x)dx$ es el elemento de integración y $\int$ es el símbolo integral

Como $\int f(x)dx = F(x) + C$, no determina un único resultado, da lugar a dos interpretaciones:

- $\int f(x)dx = F(x) + C$ es una primitiva arbitraria de *f*.
- $\int f(x)dx = F(x) + C$ es el conjunto formado por todas las primitivas de *f*.

Desde este punto de vista $\int f(x)dx$, representa una familia de funciones y geométricamente una familia de curvas que se obtienen desplazando una de ellas sobre el eje "y" , donde la parábola de abajo no es paralela a las otras dos. Las rectas tangentes a todos los gráficos para un valor determinado son paralelos.

Teorema de Integración

a) La derivada de una primitiva es igual al integrando.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad [1]$$

$f(x)$ es la función integrando, $f(x)dx$ es el elemento de integración y $\int$ es el símbolo integral.

derivamos ambos miembros $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)'$

$$= F'(x) + C'$$ la derivada de una constante es cero

$$F'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)}$$

b) La diferencial de una primitiva es igual al elemento de integración.
Diferenciando [1]

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right)$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) + dC$$
$$= F'(x)dx$$
$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$$

c) La diferencia que hay entre dos primitivas de una misma función es igual a una contante.
Supongamos:

$$\int f(x)dx = F_1(x)$$
$$\int f(x)dx = F_2(x)$$
$$\boxed{F_1(x) - F_2(x) = h(x)}$$

derivamos ambos miembros: $F_1'(x) - F_2'(x) = h'(x)$

$$f(x) - f(x) = 0$$

son iguales porque son primitivas de una misma función.

como nos queda que la derivada de *h(x)* tiene que ser cero entonces ***h(x)* =cte**.

d) Todo factor constante puede ser extraído o incluido en el símbolo integral.

$$\boxed{\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx}$$

para probarlo derivamos ambos miembros:

$$\left(\int c.f(x)dx\right)' = \left(c\int f(x)dx\right)'$$
$$c.f(x) = c.f(x)$$

Métodos de integración:

Integración Inmediata

Se realiza aplicando directamente la tabla y haciendo operaciones algebraicas que sean necesarias.
Ver la tabla de Integrales Inmediatas que se adjunta
A partir de estas integrales inmediatas, se desarrollarán técnicas para obtener integrales indefinidas de funciones más complejas.

Integración por descomposición

$$\boxed{\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx}$$

La integral de la suma es igual a la suma de las integrales

Prueba:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C_1 \qquad\qquad \int g(x)dx = G(x)+C_2$$

Si hago $H(x)=F(x)+G(x)+C_3$ donde $C_3 = C_1 + C_2$

Entonces $H'(x) = F'(x)+G'(x)$

$H'(x) = f(x)+g(x)$

y pruebo escribir:

$$\begin{aligned}\int [f(x)+g(x)]dx &= H(x)+C_3\\ &= F(x)+G(x)+C_3\\ &= \underbrace{F(x)+C_1}+\underbrace{G(x)+C_2}\\ &= \int f(x)dx + \int g(x)dx\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Ejemplo:

a) $\int (x^2+2x^3+3)dx = \int x^2dx + \int 2x^3dx + \int 3dx$

$$\boxed{= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} + 3x + C}$$

b) $\int \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

¡Advertencia!, únicamente se pueden distribuir las integrales cuando hay suma, para resolver este ejercicio primero hay que desarrollar el cuadrado del binomio.

$$= \int \left(x^4 + 2x^2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int x^4dx + \int 2xdx + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C = \boxed{\frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{1}{x} + C}$$

Integración por sustitución de variable

Este método se usa cuando la función a integrar es una función que no figura en tabla, pero se hace un cambio de variable llamando “U” a una parte o toda la función y lo que no sea “U” forme parte del “"$dU = U'dx$".

$$\int f\underbrace{[g(x)]}_{U'}\underbrace{g'(x)dx}_{dU} = \int \underbrace{f(U)dU}_{\text{esta debe ser una integral de tabla}}$$

$U = g(x)$
$dU = g'(x)$
No se puede aplicar en todos los casos.

Ejemplos:

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \underbrace{\ln x}_{U} . \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dU} = \int U.dU = \frac{U^2}{2} + C$

$U = \ln x$

$dU = \frac{1}{x} dx$ $\boxed{= \frac{\ln^2 x}{2} + C}$

b) $\int 2xe^{x^2+1} dx = \int e^{\overbrace{x^2+1}^{U}} . \underbrace{2xdx}_{dU}$

$U = x^2 + 1 = \int e^U .dU$

$dU = 2xdx$

$= e^U + C = \boxed{e^{x^2+1} + C}$

Integración por partes

Si tenemos una función $y = u.v$

$$dy = d(u.v) = du.v + dv.u$$

Despejamos $u.dv$: $u.dv = d(u.v) - v.du$

Integrando: $\int u.dv = \int d(u.v) - \int v.du$

esta es la fórmula de la integral por partes.

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

O sea de la integral llamamos a una parte "*u*" y la otra parte junto con el *dx* la hacemos "*dv*". Luego calculamos "du" derivando "*u*" y multiplicándola por "*dx*" y calculamos "*v*" integrando "*dv*".
Ejemplo:

a) $\int \underbrace{x}_{u} . \underbrace{\cos x.dx}_{dv} = x.\text{sen } x - \int \text{sen } x.dx = x.\text{sen } x - (-\cos x) + C$

$u = x, \quad dv = \cos x.dx$

$du = dx, \quad v = \text{sen } x$ $\boxed{= x.\text{sen } x + \cos x + C}$

b) $\int \ln x.dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x} dx = \boxed{x.\ln x - x + C}$

$u = \ln x, \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$

Estos dos métodos: Sustitución y por partes, son esenciales para la integración, luego se estudian métodos que son especiales para clases de funciones particulares, como las racionales y las trigonométricas.

Métodos para resolver integrales especiales

Fracciones racionales por descomposición en fracciones simples (Raíces reales y distintas)
Dada una función *f*(*x*) que deseamos integrar dado de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Polinomio de grado m en x

Polinomio de grado n en x

$$P_m(x) = a_o x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$
$$Q_n(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$$

1ª Condición) $\boxed{m < n}$ grado del numerador menor que el del denominador. Si no lo es se efectuará la división :

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x).C(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

o sea $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

2ª Condición) $\boxed{b_o = 1}$ polinomio del denominador debe ser reducido. Si no lo es se saca b_o factor común.

Procedimiento

Expresamos a $Q_n(x)$ como producto de sus raíces.

$$Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

raíces del polinomio

queda: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{P_m(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$

podemos expresar a $P_m(x)$ como una suma de constantes de valor desconocido y descomponer la fracción principal en una suma de fracciones simples.

$$① \quad \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)}$$

Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son desconocidos y debemos determinarlas pero una vez hecha la interpretación es sencilla.

Cada una de las integrales se resuelve como sigue:

$$\int \frac{A_i}{x - x_i} dx = A_i \int \frac{du}{u} = A_i \ln u + C = A_i.\ln(x - x_i) + C$$

$u = x - x_i$

$du = dx$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = A_1 \ln(x - x_1) + A_2 \ln(x - x_2) + \cdots + A_n \ln(x - x_n) + C} \quad ②$$

Formula que se aplica una vez determinadas las constantes.

Forma de obtener $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Multiplicar la expresión ① por $Q_n(x)$

$$Q_n(x)\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \cdots + \frac{A_n}{(x - x_n)}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

$$Q'_n(x) = (x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Si damos ahora valores a "*x*" de cada una de las raíces $(x_1; x_2; \dots x_n)$ y de esta forma podemos despejar $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$x = x_1 \quad \dfrac{P_m(x_1)}{Q'_n(x_1)} = A_1$ (todos los términos que contiene el paréntesis se anulan)

$x = x_2 \quad \dfrac{P_m(x_2)}{Q'_n(x_2)} = A_2$

Luego reemplazamos los valores de $A_1, A_2, \dots, A_n$ obtenidos en ②.

Siempre se debe verificar que el numerador no sea la derivada del denominador porque si es así se resuelve directamente por sustitución.

Otro método sin sacar Q' sería:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

Se resuelve la suma del segundo miembro

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(x-x_1)\dots(x-x_n) + A_2(x-x_1)\dots(x-x_n) + \cdots + A_n(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$$

Los denominadores son iguales , porque como $Q(x)$ es reducido, la factorización de $Q(x)$ es el denominador del segundo miembro. Luego:

$$P(x) = A_1(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + A_2(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + A_n(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Dando a *x* sucesivamente los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ se van obteniendo las constantes $A_1, A_2, \dots, A_n$ y luego por sustitución: $u_n = x - x_n$, podemos resolver $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ obteniendo la expresión ②

Ejemplo:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x-2} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C$

$u = x^2 + 2x - 2 \qquad \boxed{= \ln(x^2+2x-2) + C}$

$du = (2x+2)dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+x-2} dx = \int \frac{A_1}{(x-x_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)} dx$

Sacamos las raíces del denominador: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Determinamos A_1, A_2

$$A_1 = \frac{P_m(x_i)}{Q'_n(x_i)} \qquad Q(x) = (x+2)(x-1)$$
$$Q'(x) = (x-1) + (x+2)$$

$$x = x_1 = -2 \qquad A_1 = \frac{5(-2)+2}{(-2-1)} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{8}{3}}$$

$$x = x_2 = 1 \qquad A_2 = \frac{5.1+2}{0+(1+2)} \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{7}{3}}$$

Reemplazamos en la fórmula general:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{A_1}{(x-x_1)}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-x_2)}\,dx = \int \frac{8/3}{(x+2)}\,dx + \int \frac{7/3}{(x-1)}\,dx$$
$$\boxed{= \frac{8}{3}\ln(x+2) + \frac{7}{3}\ln(x-1) + C}$$

Integración por fracciones simples cuando el denominador hay raíces reales múltiples y/o raíces complejas conjugadas.

Ej: $$\int \frac{x+4}{(x^2+4)(x-1)^2}\,dx$$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, podemos aplicar el método . En el denominador hay una raíz doble $x = 1$ y dos raíces complejas conjugadas $x = \pm 2i$.
Haremos así:

$$\frac{(x+4)}{(x^2+4)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Nota: Si una raíz es de orden *n*, la descomposición en fracciones simples se hará en "n" fracciones, cuyos numeradores serán constantes, y cuyos denominadores serán las distintas potencias de (x - a) desde 1 hasta *n*.

Volviendo al ejemplo planteado se determina $A = 1;\ B = -\frac{1}{5};\ C = \frac{1}{5};\ D = -\frac{4}{5}$

Reemplazando:

$$\int \frac{x+4}{(x^2+4)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-1/5}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{x^2+4}\,dx$$

Las dos primeras integrales son directas, la 3ª $\frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ se resuelve por sustitución $\left(u = x^2+4\right)$; resolvemos la última:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}, \qquad u = \frac{x}{2},\quad du = \tfrac{1}{2}\,dx,\quad u^2 = \left(\tfrac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\,2du = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{x}{2}\right) + C$$

Finalmente: $\int \frac{x+4}{(x^2+4)(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\ln(x-1) + \frac{1}{10}\ln(x^2+4) - \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Integrales irracionales

Son cuatro casos de integrales que contienen raíces

1er Caso: $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}$ Se resuelve por sustitución, pero antes hacemos algunas operaciones algebraicas porque lo vamos a trasformar en $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsen} t + C$

Primero dividimos al denominador por a^2 y los multiplicamos por a^2.

$$① \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(x/a)^2}}$$

Hacemos $t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dx$

Reemplazamos en ① $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

integramos: $= \boxed{\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$

2do Caso: $\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx}$ se resuelve integrando por partes

$u = \sqrt{a^2-x^2}$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)dx \qquad v = x$

Armamos la fórmula de integral por partes

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x.\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

para resolver esta integral sumar y restar a^2

$$= x.\sqrt{a^2-x^2} - \int \underbrace{\frac{-x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{\text{distribuye el denominador y la integral}} dx$$

$$= x.\sqrt{a^2-x^2} - \int \underbrace{\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{\substack{\text{resuelvo est parte como potencias de}\\ \text{igual base (resto al primer caso los exponentes)}}} dx - \int \underbrace{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{\substack{\text{sacando } a^2 \text{ de la}\\ \text{integral queda un caso igual}}} dx$$

esta integral es igual al 1er miembro y como está restando, pasamos sumando al otro miembro.

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \left(a^2-x^2\right)^{1-\frac{1}{2}} dx - a^2 . \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx + a^2 . \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x.\sqrt{a^2-x^2} + a^2 . \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x.\sqrt{a^2-x^2} + a^2 . \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{x}{a}\right)\right) + C$$

3er Caso: $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}$ se resuelve por sustitución

Definimos una variable $\boxed{t = x + \sqrt{a^2+x^2}}$

$$dt = 1 + \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} 2x.dx$$

El numerador es igual a t

$$dt = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

$$dt = \frac{t}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

reemplazamos en la integral

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln t + C = \boxed{\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C}$$

4° Caso: $\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx}$ se resuelve por partes (procedimiento es igual al 2° caso).

$$u = \sqrt{a^2+x^2} \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}} 2x.dx \qquad v = x$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

sumamos y restamos a^2

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\underbrace{\sqrt{a^2+x^2}}} dx$$

distribuimos el denominador y la integral

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \underbrace{\int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx}_{\text{cociente de potencia de igual base}} - a^2 \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{\text{integral igual al 3}^{\text{er}}\text{ caso}}$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2 \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$2\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x.\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$= \boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x.\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C\right)}$$

Integrales Trigonométricas

Ejemplo 1 Evaluar $\int \cos^3 x\,dx$

Solución: En este caso la identidad apropiada es $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Se escribe

$$\cos^3 x = \cos^2 x.\cos x = (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Es útil tener el factor extra de $\cos x$ porque si se efectúa la sustitución $u = \operatorname{sen} x$, entonces se tiene $du = \cos x dx$. De modo que

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos^2 x.\cos x.dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x).\cos x.dx$$
$$= \int (1-u^2)du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$
$$= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

El método empleado en el ejemplo 1 sugiere la siguiente estrategia general para ser usada al evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx,$ en donde $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son enteros y m es impar o bien n es impar.

$\int \operatorname{sen}^m x.\cos^n x.dx$ ①

a) Si la potencia de la función coseno es impar $(n = 2k+1),$ guardar un factor coseno y utilizar $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de la función seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x.\cos^{2k+1} x.dx = \int \operatorname{sen}^m x(\cos^2 x)^k \cos x dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m x(1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x.dx$$

Luego sustituir $u = \operatorname{sen} x$.

b) Si la potencia de una función seno es impar $(m = 2k+1),$ guardar un factor seno y utilizar $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de la función coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x.\cos^n x.dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x.\operatorname{sen} x.dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n .\operatorname{sen} x.dx$$

Luego sustituir $u = \cos x$

Ejemplo 2 Encontrar $\int \text{sen}^5 x..\cos^2 x.dx$

Solución: En este caso la potencia de seno es impar y entonces se procede como en el caso b), sustituyendo $u = \cos x$:

$$\int \text{sen}^5 x.\cos^2 x.dx = \int \text{sen}^4 x.\cos^2 x.\text{sen}\, x.dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x.\text{sen}\, x.dx$$
$$= \int (1-u^2)^2.u^2.(-du)$$
$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6).du$$
$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

La sugerencia contenida en ① es efectiva si está presente alguna de las funciones seno o coseno elevada a una potencia impar. En el caso restante (cuando ambos enteros m y n pares) se procede como sigue.
c) Si las potencias de las funciones seno y coseno son pares, usar las identidades del semiángulo.

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad\qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Ejemplo 3 Evaluar $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x.dx$

Solución: En este caso $m = 2$ y $n = 0$, así que se utiliza la fórmula del semiángulo para $\text{sen}^2 x$:

$$\int \text{sen}^2 x.dx = \tfrac{1}{2}\int (1-\cos 2x).dx = \left[\tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x)\right] + C$$

Obsérvese que se hizo mentalmente la sustitución $u = 2x$ al integrar $\cos 2x$.

Ejemplo 4 Encontrar $\int \text{sen}^4 x.dx$

Solución: Escribir $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$ y usar c):

$$\int \text{sen}^4 x.dx = \int (\text{sen}^2 x)^2 dx = \int \left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x).dx$$

Puesto que está presente $\cos^2 2x$ se debe usar otra fórmula del semiángulo

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

Esto da lugar a

$$\int \text{sen}^4 x.dx = \tfrac{1}{4}\int \left[(1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \text{sen } 2x + \tfrac{1}{8}\text{sen } 4x\right) + C$$

$\int \tan^m x.\sec^n dx$ ②

a) Si la potencia de la función secante es par $(n = 2k)$, guardar un factor de $\sec^2 x$ y $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\int \tan^m x.\sec^2 x.dx = \int \tan^m x(\sec^2 x)^{k-1}\sec^2 x.dx$$

$$= \int \tan^m x(1+\tan^2 x)^{k-1}\sec^2 x.dx$$

Luego sustituir $u = \tan x$.

b) Si la potencia de la función tangente es impar $(m = 2k+1)$, guardar un factor de $\sec x.\tan x$ y usar $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\int \tan^{2k+1} x.\left(\sec^n x\right)^k .dx = \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1}.\sec x.\tan x.dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x.\sec x.\tan x.dx$$

Luego sustituir $u = \sec x$

Ejemplo 5 Evaluar $\int \tan^6 x.\sec^4 x.dx$

Solución: Puesto que hay una potencia par de la secante, se escribe un factor $\sec^2 x$ y se sustituye $u = \tan x$ de modo que $du = \sec^2 x.dx$. El resto del integrando se expresa luego completamente en términos de $\tan x$ por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$:

$$\int \tan^6 x.\sec^4 x.dx = \int \tan^6 x.\sec^2 x.\sec^2 x.dx$$

$$\int \tan^6 x(1+\tan^2 x).\sec^2 x.dx$$

$$\int u^6(1+u^2).du = \int (u^6 + u^8).du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \tfrac{1}{7}\tan^7 x + \tfrac{1}{9}\tan^9 x + C$$

Ejemplo 6 Encontrar $\int \tan^5 x.\sec^7 x.dx$

Solución: Puesto que hay una potencia impar de $\tan x$, se escribe como factor $\tan x.\sec x$ en el integrando y se sustituye $u = \sec x$ de modo que $du = \sec x.\tan x.dx$.

Puesto que queda una potencia par de $\tan x$, se usa la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar el resto de la integral totalmente en términos de $\sec x$:

$$\int \tan^5 x.\sec^7 x.dx = \int \tan^4 x.\sec^6 x.\sec x.\tan x.dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2.\sec^6 x.\sec x.\tan x.dx$$

$$= \int (u^2 - 1).u^6.du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6).du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^{9} x + \tfrac{1}{7}\sec^{7} x + C$$

Si $n = 0$, solamente está presente $\tan x$. En este caso se usa $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y, si es necesario, la fórmula

$$\int \tan x.dx = \ln\left|\sec x\right| + C$$

Ejemplo 7 Encontrar $\int \tan^3 x.dx$.

Solución

$$\int \tan^3 x.dx = \int \tan x.\tan^2 x.dx$$

$$= \int \tan x(\sec^2 x - 1).dx$$

$$= \int \tan x.\sec^2 x.dx - \int \tan x.dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln\left|\sec x\right| + C$$

En a primera integral se sustituyó mentalmente $u = \tan x$ de modo que $du = \sec^2 x.dx$.
Si n es impar y m es par, se expresa completamente el integrando en términos de $\sec x$. Las potencias de $\sec x$ podrían requerir integración por partes.

Ejemplo 8 Encontrar $\int \sec x.dx.$

Solución Se multiplican numerador y denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x.dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x.\tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

Si se sustituye $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x.\tan x + \sec^2 x).dx$, así que la integral se convierte en $\int \frac{1}{u} du = \ln\left|u\right| + C.$ De modo que se tiene:

$$\int \sec x.dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C \quad ③$$

El método del ejemplo anterior fue en realidad muy complicado, pero la fórmula ③ se requerirá posteriormente.

Ejemplo 9 Encontrar $\int \sec^3 x.dx$

Solución: En este caso se integra por partes con

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x.dx$$
$$du = \sec x.\tan x.dx \qquad v = \tan x$$

$$\int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec x.\tan^2 x.dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec x.(\sec^2 x.dx - 1).dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec^3 x.dx + \int \sec x.dx$$

Empleando la fórmula ③ y despejando la integral requerida, se obtiene

$$\int \sec^3 x.dx = \tfrac{1}{2}\left(\sec x.\tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|\right) + C$$

Las integrales de la forma $\int \cot^m x.\csc^n x.dx$ se pueden calcular mediante métodos semejantes debido a la identidad $1+\cot^2 x = \csc^2 x.$

④	Para evaluar las integrales a) $\int \text{sen}\, mx.\cos nx.dx,$ b) $\int \text{sen}\, mx.\text{sen}\, nx.dx,$ y c) $\int \cos mx.\cos nx.dx$ usar la identidades:
a)	$\text{sen}\, A\cos B = \tfrac{1}{2}\left[\text{sen}(A-B)+\text{sen}(A+B)\right]$
b)	$\text{sen}\, A\,\text{sen}\, B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$
c)	$\cos A\cos B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$

Ejemplo 10 Evaluar $\int \text{sen}\, 4x.\cos 5x.dx$

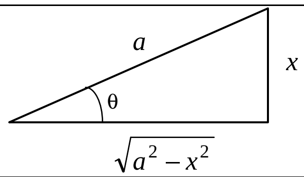
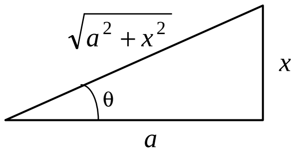
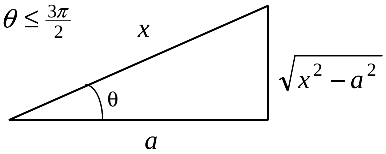
Solución: Esta integral se podría calcular usando integración por partes, pero es más fácil utilizar la identidad ④ como sigue:

$$\int \text{sen}\, 4x.\cos 5x.dx = \int \tfrac{1}{2}\left[\text{sen}(-x)+\text{sen}\, 9x\right].dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int(-\text{sen}\, x+\text{sen}\, 9x).dx$$

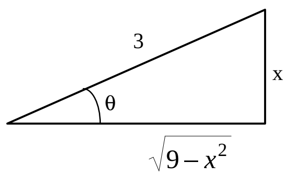
$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right)+C$$

Sustituciones Trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a.\text{sen}\,\theta \quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 	$1-sen^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a.\text{tg}\,\theta \quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 	$1+\text{tg}^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a.\sec\theta \quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ ó $\pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$ 	$\sec^2\theta-1=\text{tg}^2\theta$

Ejemplo 1 : $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ $\qquad x = 3.\text{sen}\,\theta;\quad dx = 3\cos\theta.d\theta$

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9.\cos^2\theta} = 3.\left|\cos\theta\right| = 3.\cos\theta$



$\text{cotg}\theta = \frac{\sqrt{9\text{-}x^2}}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3.\cos\theta}{9.\operatorname{sen}^2\theta}.3.\cos\theta.d\theta = \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1).d\theta$$

$$= -\operatorname{cotg}\theta - \theta + C$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C$$

Ejemplo 2 $I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$ $\qquad x = 2\operatorname{tg}\theta;\quad dx = 2\sec^2\theta.d\theta$

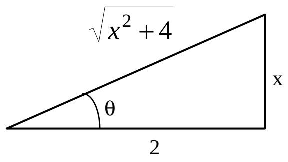
$$\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta + 1} = 2\sec\theta$$

$$I = \int \frac{2\sec^2\theta.dx}{4\operatorname{tg}^2\theta.2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,dx$$

$$u = \operatorname{sen}\theta;\quad du = \cos\theta.d\theta$$

$$I = \frac{1}{4}\int u^{-2}du = -\frac{1}{4u} = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C = \frac{1}{4}(-\operatorname{cosec}\theta) + C$$

$$I = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$



Ejemplo 3 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

Se puede usar: $x = 2\operatorname{tg}\theta$, pero la sustitución más directa es

$$u = x^2+4 \qquad \Rightarrow I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+4} + C$$
$$du = 2x.dx$$

Aún cuando sean posibles las sustituciones trigonométricas, no necesariamente proporcionan la solución de la manera más fácil. Primero se debe buscar un método mas sencillo.

Ejemplo 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad a > 0 \qquad x = a.\sec\theta;\quad dx = a.\sec\theta.\operatorname{tg}\theta.d\theta$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2.\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2.(\sec^2\theta - 1)} = a.|\operatorname{tg}\theta| = a.\operatorname{tg}\theta$$

$$I = \int \frac{a.\sec\theta.\operatorname{tg}\theta.d\theta}{a.\operatorname{tg}\theta} = \int \sec\theta.d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

$$I = \left|\ln\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$I = \ln\frac{\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a} + C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$