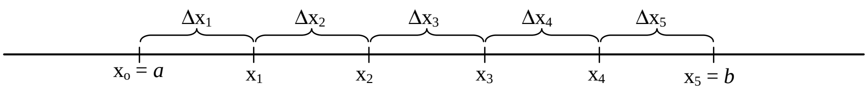
Integral Definida

Partición de un intervalo

Sea el intervalo $[a,b]$, se llama partición de I a toda colección finita de puntos de $[a,b]$ de los cuales uno es a y el otro es b.



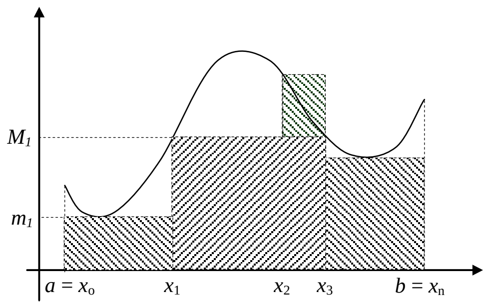
$a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$P = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; la partición P descompone a I en subintervalos ; $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $\quad x_{k-1} < x_k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ es la longitud de I_k .

En la partición no es necesario $\Delta x_k = \text{constante}$.

Norma de la partición:



Es un número $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k\}$

Es la amplitud del intervalo que tiene la máxima amplitud.

Suma inferior de f(x) sobre I. $(f(x) \geq 0)$

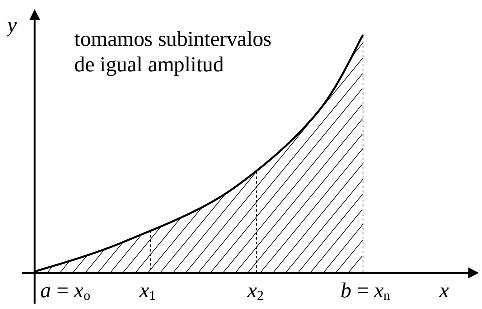
Dada una partición P relativa a I:

$$\underline{S_p}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k . \Delta x_k$$

Suma superior de f(x) sobre I.

$$\overline{S_p} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Area encerrada por $y = x^2$



$$h = \frac{b-a}{n}; \quad a = 0 \Rightarrow h = \frac{b}{n}$$

$$x_1 = \frac{b}{n} \rightarrow y_1 = \left(\frac{b}{n}\right)^2$$

$$x_2 = 2\frac{b}{n} \rightarrow y_2 = 2^2\left(\frac{b}{n}\right)^2$$

....

$$x_k = k\frac{b}{n} \rightarrow y_k = k^2\left(\frac{b}{n}\right)^2$$

....

$$x_n = \cancel{n}\frac{b}{\cancel{n}} \rightarrow y_n = n^2\left(\frac{b}{n}\right)^2$$

$$\underline{S}_n = \frac{b}{n}\left[1.\left(\frac{b}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + (n-1)^2\left(\frac{b}{n}\right)^2\right] = \frac{b^3}{n^3}\left[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right]$$

$$\overline{S}_n = \frac{b}{n}\left[\left(\frac{b}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + n^2\left(\frac{b}{n}\right)^2\right] = \frac{b^3}{n^3}\left[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{(Por Inducción Matemática)}$$

$$\underline{S}_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{1}{6}(n-1)\left[((n-1)+1)(2(n-1)+1)\right] = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{1}{6}(n-1)\left[n.(2n-1)\right] = \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$\overline{S}_n = \frac{b^3}{n^3}\,\frac{1}{6}\,n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \frac{b^3.2}{6} = \frac{b^3}{3}; \quad \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \frac{b^3}{3}$$

Se puede definir el área como el límite común, si existe de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$.

Definición de Integral Definida

Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, sea P una partición de $[a,b]$, entonces la integral definida de f de a a b es:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}_n = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}_n \text{ , si este límite existe}}$$

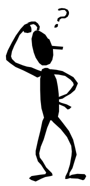
Si el límite existe, se dice que f es integrable en el $[a,b]$.

La integral $\int_a^b f(x)dx$ es un número que no depende de x.

Por esta razón x se llama variable ficticia y se puede usar cualquier letra en lugar de x sin cambiarse el valor de la integral.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

Obsérvese que al resolver el área de $y = x^2$ entre a y b, era $\|P\| = \frac{b}{n}$; entonces $\|P\| \to 0$.



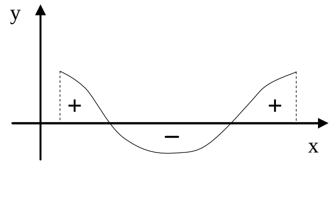
Observación: No desespere: "El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona un método mucho más sencillo para calcular áreas"

Advertencia: Una integral definida no necesariamente representa un área.

- Para el caso especial en que $f(x) \geq 0$, entonces:

  $\int_a^b f(x)dx =$ área bajo la gráfica de f de a a b.

- En general, una integral definida se puede interpretar como una diferencia de áreas



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$

A_1 : área de la región que se encuentra arriba del eje x y debajo de f.

A_2 : área de la región que se encuentra abajo “x” y arriba de *f*.

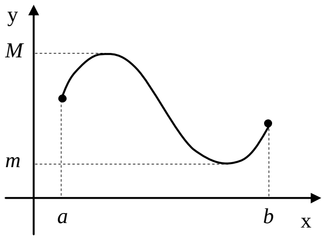
Nota: en la definición se considera una función *f*, definida en un intervalo $[a,b]$, así que suponemos implícitamente $a<b$. Pero para ciertos fines es útil extender la definición de $\int_a^b f(x)dx$ para el caso $a>b$ ó $a=b$, como sigue:

Si $a<b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Si $a=b \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$

Extremo superior y extremo inferior de f(x) en un intervalo $[a,b]$.

Condiciones: 1) $f(x)$ está definida en $[a,b]$.
2) $f(x)$ está acotada en $[a,b]$.



M = Supremo de $f(x)$ $\quad M \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$
m = Infimo de $f(x)$ $\quad m \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$

***Teorema 1*:**

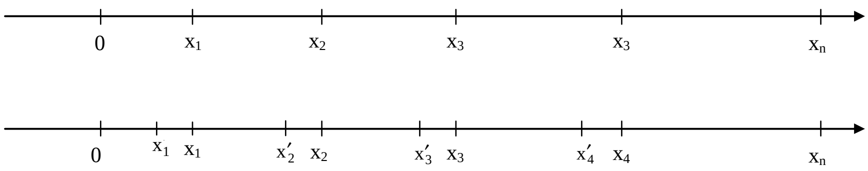
$$\left.\begin{matrix} f(x)\geq 0 \text{ en } [a,b] \\ f(x) \text{ es acotada en } [a,b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ para toda partición de I: } \overline{S_p} \geq \underline{S_p}$$

D) Por definición: $\quad m_k \leq M_k$
$m_k.\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$

$k=1 \rightarrow m_1.\Delta x_1 \leq M_1\Delta x_1$
$k=2 \rightarrow m_2.\Delta x_2 \leq M_2\Delta x_2$
....
....
$k=m \rightarrow \underline{m_m.\Delta x_m} \leq \underline{M_m\Delta x_m}$
$\underline{S_p} \leq \overline{S_p}$

Refinamiento de P

Sea $P=\{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
Hagamos $P'=\{x_o, x_1, x_1', x_2', \ldots, x_n\}$; $\quad P \subset P'$
Se dice que P' es un refinamiento de P

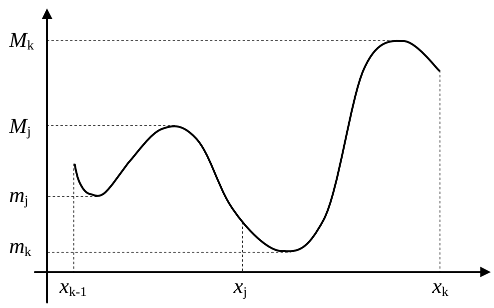


Teorema 2:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\geq 0 \ \text{ en } \quad \mathrm{I}=[\mathrm{a},\mathrm{b}] \\ f(x) \ \text{ es acotada en } \ \mathrm{I}=[a,b] \\ P \text{ es partición de I} \\ P' \text{ es un refinamiento de } P. \end{array}\right\} \Rightarrow \ \overline{S_{P'}} \leq \overline{S_P} \wedge \underline{S_{P'}} \geq \underline{S_P}$$

En resumen: en un refinamiento aumenta $\underline{S}$ y disminuye $\overline{S}$.
En P: $\quad I_k = [x_{k-1}, x_k]$
en P': $\quad I_k = [x_j, x_k]$; $\quad I_j = [x_{k-1}, x_j]$

I) Suma superior $M_j \leq M_k$ (1)



Contribución de I_k en $\overline{S_P}$:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_P} &= M_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= M_k(x_k - x_j + x_j - x_{k-1}) \\ &= M_k(x_k - x_j) + M_k(x_j - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Contribución de I_k en $\overline{S_{P'}}$:

$$\overline{\sigma_{P'}} = M_k(x_k - x_j) + M_j(x_j - x_{k-1})$$

Por (1): $\overline{\sigma_{P'}} \leq \overline{\sigma_P}$

$$\sum \overline{\sigma_{P'}} \leq \sum \overline{\sigma_P}$$

$$\overline{S_{P'}} \leq \overline{S_P}$$

II) Suma inferior $m_j \geq m_k$ (2)

$$\begin{aligned} \underline{\sigma_P} = m_k(x_k - x_{k-1}) &= m_k(x_k - x_j + x_j - x_{k-1}) \\ &= m_k(x_k - x_j) + m_k(x_j - x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\underline{\sigma_{P'}} : m_k(x_k - x_j) + m_j(x_j - x_{k-1})$$

Por (2): $\underline{\sigma_P} \leq \underline{\sigma_{P'}}$

$$\sum \underline{\sigma_P} \leq \sum \underline{\sigma_{P'}}$$

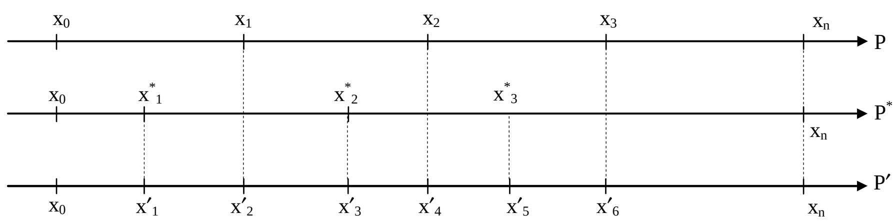
$$\underline{S_P} \leq \underline{S_{P'}}$$

Es decir: un refinamiento de P hace decrecer la suma superior y crecer la suma inferior.

Teorema 3:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \ \text{ acotada en } \ [\mathrm{a},\mathrm{b}] \\ P \text{ y } P^* \ \text{ dos particiones cualquiera de } \ [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \ \overline{S_P} \geq \underline{S_{P^*}}$$

D) Se construye P' refinamiento de P y de P^* formado por todos los puntos de P y todos los de P^* formada por todos los puntos de P y todos los de P^*.



Por Teorema (2): $\quad \overline{S_P} \geq \overline{S_{P'}}$

Por Teorema (1): $\overline{S_{P'}} \geq \underline{S_{P'}}$

Por Teorema (2): $\overline{S_{P'}} \geq \underline{S_{P^*}}$

Entonces : $\overline{S_P} \geq \overline{S_{P'}} \geq \underline{S_{P'}} \geq \underline{S_{P^*}}$

Por lo tanto: $\overline{S_P} \geq \underline{S_{P^*}}$

Consecuencia de los teoremas (1) (2) y (3)
Sea P una partición; P_1: refinamiento de P.
P_2 : refinamiento de P_1 ; P_n : refinamiento de P_{n-1}

Entonces: $\overline{S_P} \geq \overline{S_{P_1}} \geq \overline{S_{P_2}} \geq \ldots \overline{S_{P_n}} \ldots \geq \underline{S_{P_n}} \geq \ldots \underline{S_{P_2}} \geq \underline{S_{P_1}} \geq \underline{S_P}$

Denominaremos: inf $\overline{S} \geq \underline{S_{P_i}}$ (extremo inferior de la suma superior)

sup $\underline{S} \leq \overline{S_{P_i}}$ (extremo superior de la suma inferior)

Debe ser: inf $\overline{S} \geq$ sup $\underline{S}$ caso contrario contradice T_1.

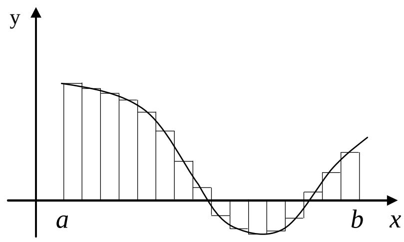
Definición:
Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, sea P una partición de $[a,b]$ con puntos de división $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en donde $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, la integral definida de f de a a b es:

$\int_a^b f(x)dx = \inf \overline{S} = \sup \underline{S}$, también podemos dar la definición de la siguiente forma:

Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, sea P una partición de $[a,b]$. Elíjanse puntos x_i^* en $[x_i, x_{i-1}]$ y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_i\}$.

Entonces la integral definida de f de a a b es

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, si este límite existe. Si existe se dice que f es integrable en $[a,b]$.



La suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ que se incluye en la definición, se llama suma de Riemann.

Si f es positiva, entonces la suma de Riemann se puede interpretar como una suma de áreas de rectángulos de aproximación. Si f toma tanto valores positivos como negativos, la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los valores negativos de las áreas de los rectángulos que se encuentran debajo del eje x.

Ejemplo:
Sea $f(x) = 1 + 5x$ y considérese la partición P del intervalo $[-2,1]$; $P = \{-2,\ -1{,}5,\ -1,\ -1,\ -0{,}3,\ 0{,}2,\ 1\}$

En este ejemplo $a = -2;\quad b = 1;\quad n = 5$

$x_o = -2;\quad x_1 = -1{,}5;\quad x_2 = -1;\quad x_3 = -0{,}3;\quad x_4 = 0{,}2;\quad x_5 = 1$

$\Delta x_1 = -1{,}5 - (-2) = 0{,}5$; $\quad \Delta x_2 = -1 - (-1{,}5) = 0{,}5$; $\quad \Delta x_3 = -0{,}3 - (-1) = 0{,}7$; $\quad \Delta x_4 = 0{,}2 - (-0{,}3) = 0{,}5$

$\Delta x_5 = 1 - (0{,}2) = 0{,}8$

De esta manera, la norma de la partición P es

$\|P\| = \text{máx}\{0{,}5, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}5, 0{,}8\} = 0{,}8$

Suponga que elegimos $x_1^* = -1{,}8;\quad x_2^* = -1{,}2;\quad x_3^* = -0{,}3;\quad x_4^* = 0;\quad x_5^* = 0{,}7$

La suma de Riemann correpondiente es:

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)\Delta x_i = f(-1{,}8)\Delta x_1 + f(-1{,}2)\Delta x_2 + f(-0{,}3)\Delta x_3 + f(0)\Delta x_4 + f(0{,}7)\Delta x_5$$

$$= (-8).(0{,}5) + (-5).(0{,}5) + (-0{,}5).(0{,}7) + 1.(0{,}5) + (4{,}5).(0{,}8) = -2{,}75$$

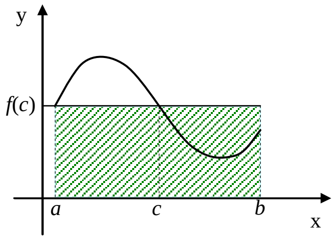
Obsérvese que en este ejemplo, *f no es una función positiva* y entonces la suma de Riemann, no representa una suma de áreas de rectángulos.

Una integral definida no necesariamente representa un área. Sin embargo, para funciones positivas, una intergral se puede interpretar como un área. Para el caso especial en que $f(x) \geq 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{ área bajo la gráfica de } f \text{ de } a \text{ a } b.$$

Teorema del Valor Medio

Si f continua en $[a,b]$, entonces existe un número "c"$\in (a,b) / \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a); \quad a < c < b$



$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a); \quad a < x < b$$

$$m(b-a) = \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

dividimos miembro a miembro por $b-a$:

$$\text{luego} \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

La importancia de este teorema radica en que constituye un auxiliar para la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo.

Teorema Fundamental del Cálculo.

El nombre del teorema Fundamental del Cálculo no podía ser más apropiado, ya que establece una relación entre las dos ramas del cálculo: el *cálculo diferencial* y el *cálculo integral*. El cálculo diferencial tuvo su origen en el problema de la tangente, mientras que el cálculo integral surgió de un problema al parecer no relacionado, el problema del área. El maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow, descubrió que en realidad estos dos problemas están íntimamente relacionados. Barrow se dio cuenta de que la diferenciación y la integración son procesos inversos. El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona la relación inversa exacta entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz fueron quienes aprovecharon esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que podían calcular áreas e integrales de manera muy sencilla, sin tener que calcularlas como límites de sumas.

Teorema Fundamental del Cálculo (primera parte)

Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x) = f(x)$.

D) Queremos demostrar que $g'(x) = f(x)$ y para ello determinaremos $g'(x)$.

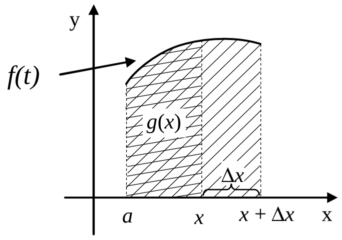
$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Ahora: $g(x)=\int_a^x f(t)dt$

ponemos "t" en lugar de "x" para no confundirla con la "x" del extremo superior de la integral, pero el resultado es el mismo.

$g(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

subdividiendo el intervalo podemos escribir como sigue



$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Como: $\Delta g(x)=g(x+\Delta x)-g(x)$

$$\Delta g(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$\Delta g(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (1)$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio para integrales y tomando $x<\varepsilon<x+\Delta x$ podemos escribir (1) así:

$$\underbrace{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}_{\Delta g(x)}= f(\varepsilon)\underbrace{(x+\Delta x-x)}_{\text{amplitud}}$$

$\boxed{\Delta g(x)= f(\varepsilon)\Delta x}$ incremento de la función g.

Hacemos el cociente incremental $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(\varepsilon).\Delta x}{\Delta x}= f(\varepsilon)$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}_{\boxed{g'(x)= f(x)}}=\underbrace{\lim_{\varepsilon\to x}}\, f(\varepsilon)= f(x)$$

esto ocurre cuando $\Delta x\to 0$, como $x<\varepsilon<x+\Delta x$, entonces $\varepsilon\to x$

$\boxed{g'(x)= f(x)}$

Teorema Fundamental del Cálculo - segunda parte - (Regla de Barrow)

Si f es continua en $[a,b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ en donde F es cualquier antiderivada de f, es decir $F'=f$.

Por el Teorema Fundamental del cálculo: $g(x)=\int_a^x f(x)dx$, $g'(x)= f(x)=F'(x)\Rightarrow g(x)$ y $F(x)$ difieren en una constante.

Regla de Barrow

$\int_a^b f(x)dx=?$

1) Encontramos la primitiva $F(x)$, de la que sabemos que pueden ser infinitas y difieren en una constante.

$$g(x)=\int_a^x f(x)dx=F(x)+C$$

2) Hacemos $x=a$

$\int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0$ (La integral definida en un punto es nula)

$$F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

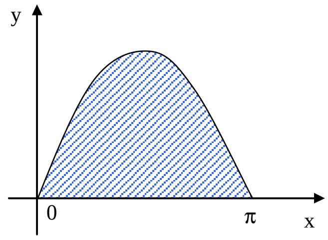
3) Hacemos $x = b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

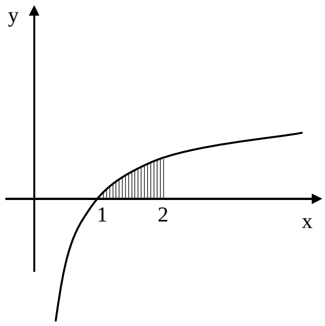
La integral definida en un intervalo $[a, b]$ es la función primitiva en la que se reemplaza a "x" por el valor "b" y se le resta la misma función en la que $x = a$.

Ejemplos:

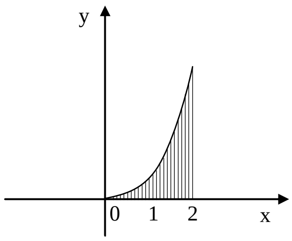
1) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



2) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$



3) $\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$



Fraccionamiento del intervalo de integración

$$\int_a^b f(x)dx = (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \cdots + (c - x_{k-1})f(\xi_c) + (x_{k+1} - c)f(\xi_{k+1}) + \cdots + (b - x_{n+1})f(\xi_b)$$

$$= \left[(x_1 - a)f(\xi_1) + \cdots + (c - x_{k-1})f(\xi_c)\right] + \left[(x_{k+1} - c)f(\xi_{k+1}) + \cdots + (b - x_{n-1})f(\xi_b)\right]$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

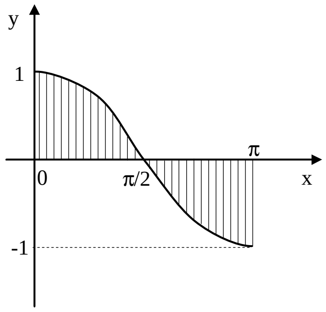
Intercambio de los límites

$$\int_b^a f(x)dx = \left[(x_{n-1} - b)f(b) + \ldots + (a - x_1)f(\xi_1)\right] = -\left[(x_1 - a)f(\xi_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_b)\right] = -\int_a^b f(x)dx$$

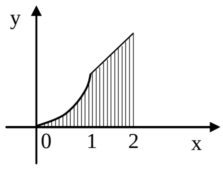
Consecuencia: $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$; $\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c$; $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$

Ejemplo 1):

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \left|\operatorname{sen} x\right|_0^{\pi/2} + \left|\operatorname{sen} x\right|_{\pi/2}^{\pi} = (1-0)+(0-1) = 1-1 = 0$$



Ejemplo 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{para } 1 \le x \le 2 \end{cases}$



$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left|\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{6}$$

Integración por partes

$u = u(x) \quad \rightarrow \quad du = u'dx$

$v = v(x) \quad \rightarrow \quad dv = v'dx$

$(u.v)' = u'v + u.v'$

Teorema:

1) $u = u(x)$ es derivable en $[a,b]$; $du = u'dx$

2) $v = v(x)$ es derivable en $[a,b]$; $dv = v'dx$

Entonces: $\int_a^b u.dv = \left|u.v\right|_a^b - \int_a^b v.du$

Demostración:

$$\int_a^b (u.v)'dx = \int_a^b [u'.v + u.v']dx \quad (1)$$

$$\int_a^b (u.v)'dx = \left|u.v\right|_a^b \quad (2)$$

$$\int_a^b (u'.v + u.v')dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv \quad (3)$$

Sustituyendo: $\left|u.v\right|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$

lo que implica: $\boxed{\int_a^b udv = \left|u.v\right|_a^b - \int_a^b vdu}$

Ejemplo: $I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

$u = x$ es derivable $\rightarrow$ $du = dx$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$dv = \cos x dx$

$v = \int dv = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$\left| u.v \right|_{o}^{\pi/2} = \left| x.\operatorname{sen} x \right|_{0}^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\int_a^b v du = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \left| -\cos x \right|_0^{\pi/2} = -\left| \cos x \right|_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1$

Luego: $I = \dfrac{1}{2}\pi - 1$

Integración por sustitución

Teorema:

1) $f(x)$ continua en $[a,b]$

2) $x = x(t)$ derivable en $[t_a, t_b]$; $a = x(t_a)$; $b = x(t_b)$

3) $x'(t)$ es continua en $[t_a, t_b]$.

Entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f[x(t)].x'(t).dt$

Sea: $\int f(x)dx = \varphi(x) + C = F(x)$

con $\varphi'(x) = F'(x) = f(x)$

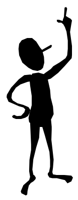
Por derivación de funciones compuestas

$F'[x(t)] = \dfrac{d}{dt} F(x) = F'(x).x'(t) = f(x).x'(t) = f[x(t)].x'(t)$

$\int_{t_a}^{t_b} f[x(t)].x'(t).dt = \left| F[x(t)] \right|_{t_a}^{t_b} = F[x(t_b)] - F[x(t_a)] =$

$F(b) - F(a) = \varphi(b) - \varphi(a)$ por (2)

Luego $\int_{t_a}^{t_b} f[x(t)].x'(t).dt = \int_a^b f(x)dx$ (1)



¡*Cuidado*! cuando se emplea el método de sustitución hay que cambiar los límites de integración.

Ejemplo: $I = \int_1^2 \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx$

$u = x^3 + 8$

$du = 3x^2 dx$

$x \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow 9$

$x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 16$

$I = \dfrac{4}{3}\int_9^{16} \dfrac{du}{u^{1/2}} = \dfrac{4}{3}\int_9^{16} u^{-1/2} du = \dfrac{4}{3} \dfrac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{8}{3} u^{1/2} \Big|_9^{16} = \dfrac{8}{3}(4-3) = \dfrac{8}{3}$

¡No olvidar! cuando se integra por partes no hay que cambiar los límites pero hay que evaluar las dos partes de la fórmula.

$$I=\int_1^e x^2.\ln x dx=\left[\frac{x^3}{3}.\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx=\left[\frac{x^3}{3}.\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$

$v=\ln x;\quad du=x^2dx$

$dv=\frac{1}{x}dx;\quad u=\frac{x^3}{3}$

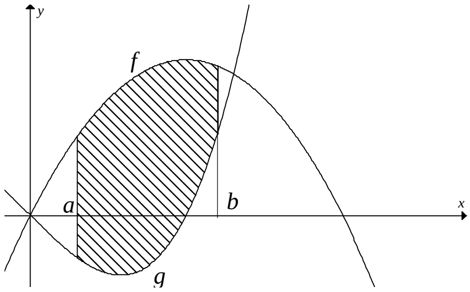
$$I=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}=\frac{2e^3-1}{9}$$

Areas comprendidas entre curvas

El area de la región limitada por $y=f(x),\quad y=g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$, en donde f y g son continuas y

$f(x)\geq g(x)\quad \forall x$ en $[a,b]$ es:

$$A=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx$$



Ej.1) Calcular el área d la región limitada por $y=x^2,\quad y=2x-x^2$

Solución:

Hallamos la intersección de las dos curvas:

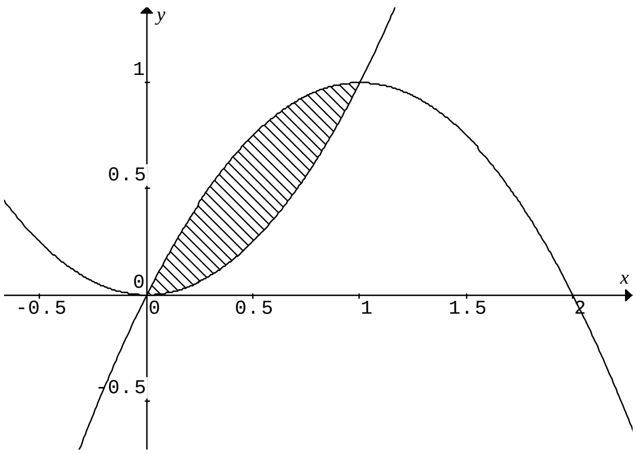
$$x^2=2x-x^2\quad\Rightarrow 2x(x-1)=0\quad \begin{cases}x_1=1\\x_2=0\end{cases}$$

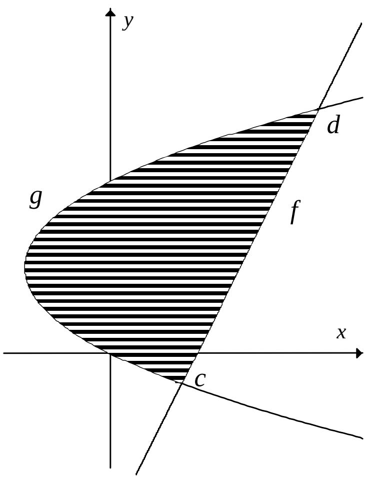
$x=0\Rightarrow y=0\quad (0,0)$

$x=1\Rightarrow y=1\quad (1,1)$

$$A=\int_0^1(2x-x^2-x^2)dx$$

$$A=\int_0^1(2x-2x^2)dx=\left[x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$





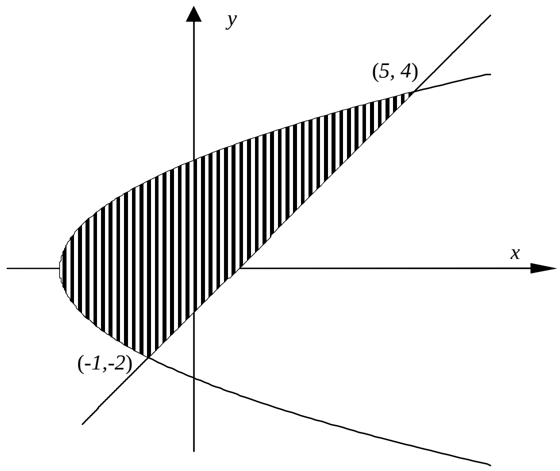
En este ejemplo en vez de considerar a y como f de x, considero x como función de y.

En general si una región está limitada por curvas con ecuaciones de la forma $x=f(y),\quad x=g(y),\quad y=c,\quad y=d$ en donde f y g son continuas y $f(y)\geq g(y)$ para $c\leq y\leq d$

entonces su área es:

$$A=\int_c^d\left[f(y)-g(y)\right]dy$$

Ej 2) Calcule el área limitada por
$y = x - 1, \quad y^2 = 2x + 6$

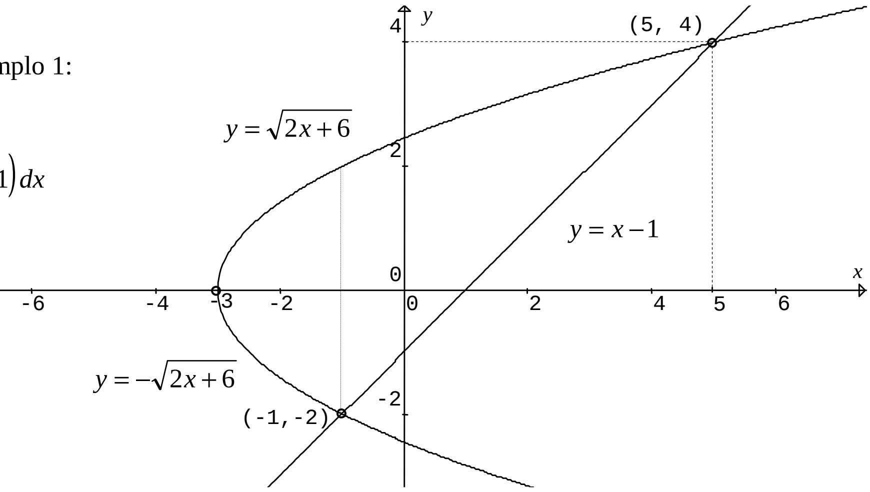


$$2x + 6 = (x-1)^2$$
$$2x + 6 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 4x - 5 = 9$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \left\langle \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

puntos de intersección : $(-1,-2)$ y $(5,4)$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[y + 1 - \left(\frac{y^2 - 6}{2} \right) \right] dy$$
$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \frac{y^2}{2} - 3 \right) dy$$
$$A = \left[\frac{y^2}{2} + y - \frac{y^3}{6} + 3y \right]_{-2}^{4} = 18$$

Si hubiera procedido como en el ejemplo 1:



$$A = \int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+5} + \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - x + 1 \right) dx$$

$u = 2x + 6$
$du = 2dx$
$x = -3 \rightarrow u = 0 \qquad x = -1 \rightarrow u = 4$
$x = -1 \rightarrow u = 4 \qquad x = 5 \rightarrow u = 16$

$$I = \frac{2}{2} \int_{0}^{4} u^{1/2} du + \frac{1}{2} \int_{4}^{16} u^{1/2} du = -\left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{5} = 18$$

Integrales impropias

- ***① Con límites de integración infinitos.***

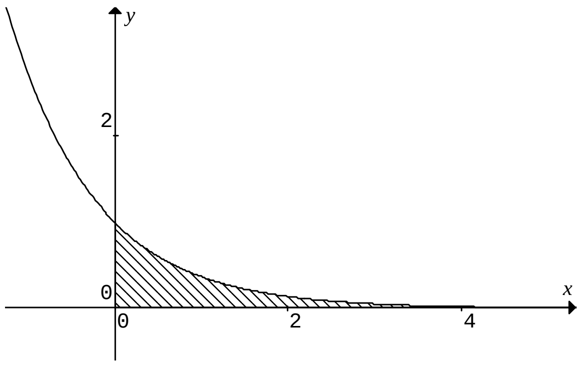
Para que una función sea integrable se deben cumplir dos condiciones básicas:

$\left.\begin{array}{l}\text{1) Los extremos } a \text{ y } b \text{ del intervalo de integración deben ser finitos.}\\ \text{2) La función debe ser continua dentro del intervalo } [a,b]\end{array}\right\}$ Integral propia

Al definir $\int_a^b f(x)dx$, pretendimos que la función f estuviera definida en el intervalo cerrado $[a,b]$.
Ahora ampliaremos la definición de la integral definida para considerar un intervalo infinito de integración y a dicha integral la denominaremos integral impropia.

Ej1: Consideremos el problema de calcular el área de la región limitada por $y = e^{-x}$, el eje *y*, y la recta $x = b \quad (b > 0)$.

$$A = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b}$$



Si dejamos que b aumente sin límite, entonces:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1$$

<u>Definición:</u> Si f es continua para todo $x \geq a$, entonces: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, si este límite existe.

<u>Definición:</u> Si f es continua para todo $x \leq b$, entonces: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$, si este límite existe.

<u>Definición:</u> Si f es continua para todos los valores de *x*, y *c* es cualquier número real, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx$$

El segundo miembro es independiente de la elección de *c*. Por lo general, al aplicar la definición, *c* de toma como cero.
En las definiciones anteriores, si los límites existen, decimos que la integral impropia es convergente, caso contrario es divergente.

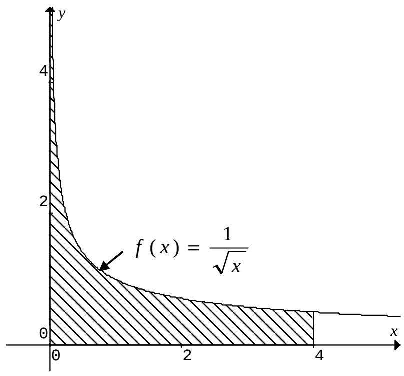
Ej2: $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 xdx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b xdx =$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}a^2\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2}b^2\right)$$

La integral impropia diverge.

- ***② Con discontinuidad infinita en alguno de los límites de integración***

<u>Definición:</u> Si f es continua para toda x en el intervalo $(a,b]$ y si $\lim_{x\to a^+} = \pm\infty$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)dx$, si este límite existe.



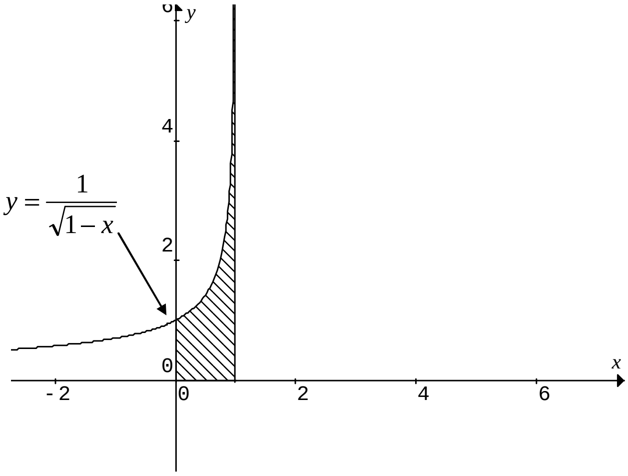
Ej: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to0^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to0^+} 2x^{1/2}\Big|_t^4 = \lim_{t\to0^+} \left(4 - 2\sqrt{t}\right) = 4$

<u>Definición:</u> Si f es continua para toda x en el intervalo $[a,b)$ y si $\lim\limits_{x\to b^-} = \pm\infty$, entonces

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(x)dx$, si este límite existe.

Ej:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$



♦ ***③ Discontinuidad infinita en un punto interior del intervalo de integración***

<u>Definición:</u> Si f es continua para toda $x \in [a,b]$ excepto para $x = c$, siendo $a < c < b$ y si

$\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = +\infty$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim\limits_{s\to c^+} \int_s^b f(x)dx$; si este límite existe.

Ej: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; el integrando tiene una discontinuidad infinita en x = 1.

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_s^2$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1\right] + \lim_{s\to 1^+} \left[-1 + \frac{1}{s-1}\right]$$; la integral impropia es divergente.