Recta tangente a una curva en un punto

Dada una curva de ecuación $y = f(x)$, se trata de encontrar la recta tangente en un punto P de abscisa x_1 haciendo $y_1 = f(x_1)$, la ecuación de una recta cualquiera que pase por $P(x_1, y_1)$ es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.Obteniéndose una recta del haz para cada valor asignado a *m*; pero *m* debe ser el valor de la derivada en x_1, para que la recta coincida con la tangente.

Con lo que la ecuación de la tangente será:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

Cuando la derivada es infinita en x_1, la tg es paralela al eje y, y la ecuación es x= x_1.

Ej: Halle la ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2$ en $x_1 = 3$

$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9$ $\quad (x_1, y_1) = (3{,}9)$

$f'(x) = 2x$

$f'(3) = 6$

La ecuación de la tangente será: $y - 9 = 6(x - 3)$

Ecuación de la normal

Se llama normal a una curva en un punto $P(x_1, y_1)$ a la perpendicular a la tangente, trazada por P.

Por pasar por P(x_1, y_1), la normal tiene una ecuación de la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$ y como la condición de perpendicularidad de dos rectas es que sus coeficientes angulares sean recíprocos y de signos contrarios:

$m = -\dfrac{1}{f'(x)}$; luego la ecuación de la Normal, si $f'(x) \neq 0$ será:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

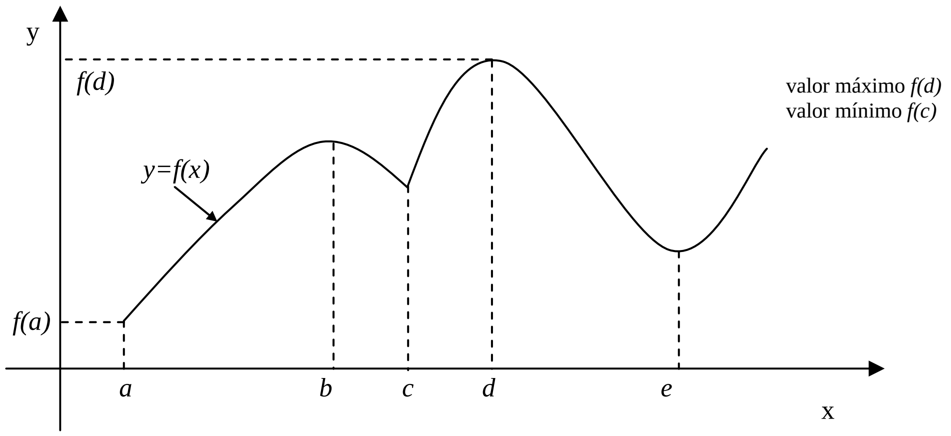
Si $f'(x) = 0$ no se puede aplicar la ecuación anterior, pero en este caso la tangente es paralela al eje x y la normal será paralela al eje y, de ecuación: x= x_1.

Valores Máximo y Mínimo

Definición: Una función f tiene un máximo absoluto en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f y el número $f(c)$ se llama valor máximo de f en D.

Análogamente, f tiene un mínimo absoluto en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D, al número $f(c)$ se llama valor mínimo de f en D.

Los valores máximos y mínimos de *f*, se llaman *valores extremos* de *f*.



Definición: Una función tiene un máximo local (o máximo relativo) en c, si existe un entorno de c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para $\forall x \in N_\delta(c) \cap D(f)$.

Análogamente, f tiene un mínimo local en c si existe un entorno de c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para $\forall x \in N_\delta(c) \cap D(f)$.

Ej. 1: La función $f(x) = \cos x$ adquiere su valor máximo (local y absoluto) de 1 infinidad de veces, ya que $\cos 2n\pi = 1 \quad \forall n \in Z$.

$\cos(2n+1)\pi = -1$ es su valor mínimo, en donde $n \in \mathbf{Z}$.

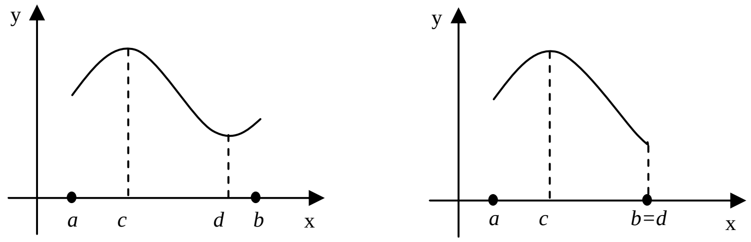
Ej. 2: Si $f(x) = x^2$ entonces $f(x) \geq f(0)$ $\forall x$, ya que $x^2 \geq 0$ $\forall x$; Por lo tanto $f(0) = 0$ es mínimo absoluto (y local) de f. Esto se debe al hecho de que el origen es el punto más bajo de la parábola $y = x^2$. Sin embargo, no hay punto de la parábola que sea el más alto, por lo que esta función no tiene valor máximo.

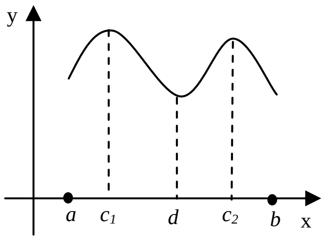
Ej. 3: $f(x) = x^3$ no tiene máximo ni mínimo absoluto. En realidad tampoco tiene valores extremos locales.

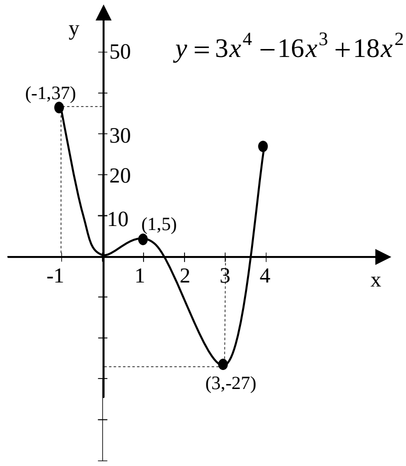
Algunas funciones tienen valores extremos y otras no, el siguiente teorema proporciona condiciones bajo las cuales se garantiza que una función tiene valores extremos.

Teorema (de los valores extremos): Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f toma un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en ciertos números c y d de $[a,b]$.

(Se omite la demostración). En la siguiente figura se ilustra el teorema de los valores extremos. Obsérvese que un valor extremo se puede adquirir más de una vez.

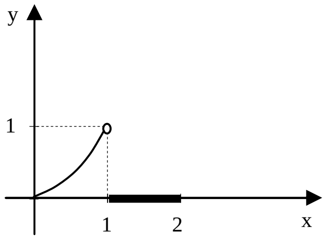






Los dos ej. siguientes muestran que una función no necesariamente tiene valores extremos si se omite algunas de las hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema de los valores extremos.

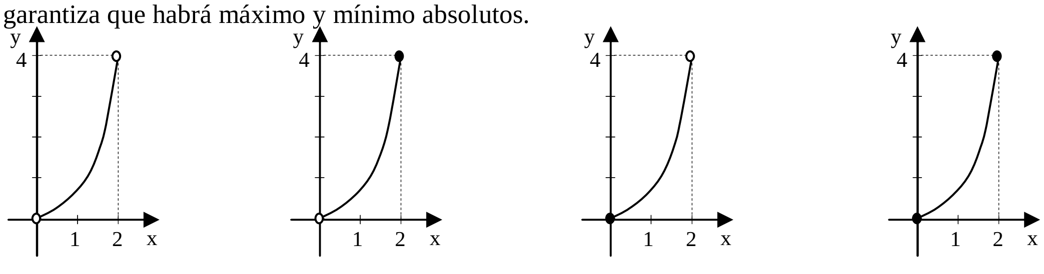
Ej. 1



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

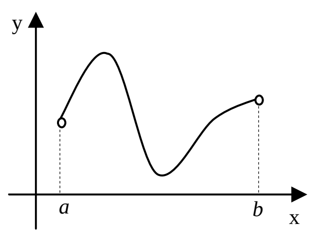
está definida en $[0,2]$ pero no tiene valor máximo. La función adquiere valores arbitrariamente cercanos a 1, pero en realidad nunca adquiere el valor de 1. Esto no contradice el teorema de los valores extremos porque *f* no es continua en $[0,2]$. La función tiene discontinuidad en x=1.

Ej.2: La función $f(x) = x^2,\ 0 < x < 2$ es continua en el intervalo finito (0,2) pero no tiene valor máximo ni mínimo. f no adquiere los valores 0 y 4. Esto no contradice el teorema de los valores extremos ya que el intervalo (0,2) no es cerrado.
Si se modifica la función incluyendo algunos de los puntos extremos del (0,2) entonces se obtienen las situaciones que se muestran en la fig.
En particular, la función $k(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2$ es continua en $[0,2]$, así el teorema de los valores extremos garantiza que habrá máximo y mínimo absolutos.



$f(x) = x^2,\ 0 < x < 2$	$g(x) = x^2,\ 0 < x \le 2$	$h(x) = x^2,\ 0 \le x < 2$	$k(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2$
No hay máximo	Máximo $g(2) = 4$	No hay máximo	Máximo $k(2) = 4$
No hay mínimo	No hay mínimo	Mínimo $h(0) = 0$	Mínimo $k(0) = 0$

No obstante el ejemplo anterior, es conveniente hacer notar que una función continua, como la que se ilustra a continuación podría tener un valor máximo o mínimo incluso cuando está definida en un intervalo abierto. Asímismo una función discontinua podría tener valores máximo y mínimo, pero no hay garantía de ello.



Teorema de fermat

Si f tiene un extremo local (o relativo) en c; y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c)=0$.

Demostración: Suponga en particular, que f tiene un máximo relativo en *c.* Entonces, según la definición $f(c) \geq f(x)$ si *x* es un valor del entorno de *c*.

$$f(c+\Delta x)-f(c) \leq 0$$
$$f(c-\Delta x)-f(c) \leq 0$$

o bien : $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \dfrac{f(c-\Delta x)-f(c)}{(-\Delta x)} \geq 0$

es decir: $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \leq \dfrac{f(c-\Delta x)-f(c)}{(-\Delta x)}$

pasando al límite para $\Delta x \to 0$, entonces $f'(c) \leq 0 \leq f'(c)$, pero la función es derivable; luego la única posibilidad es que $f'(c)=0$.

La condición $f'(c)=0$ es necesario pero no suficiente.

Ej. $f(x)=x^3$; $f'(0)=0$ y sin embargo en *x*=0 no hay máximo ni mínimo.

Los siguientes ejemplos advierten la interpretación incorrecta del teorema de Fermat. No se puede esperar localizar valores extremos simplemente haciendo $f'(x)=0$ y resolviendo para x (esto sólo en funciones derivables).

Ej. 1) La función $f(x)=|x|$ tiene su valor mínimo (relativo y absoluto) en *x* = 0, pero no se puede encontrar dicho valor haciendo $f'(x)=0$, ya que $f'(0)$ no existe.

El teorema de Fermat sugiere que, por lo menos debemos buscar valores extremos de f, donde $f'(c)=0$ o donde $f'(x)$ no existe.

Definición: Un **número crítico** de una función f es un número *c* del dominio de f, tal que $f'(c)=0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Ej. encuentre los números críticos de $f(x)=x^{3/5}(4-x)$

$f'(x)=\dfrac{12-8x}{5x^{2/5}}$; los números críticos son $3/2$ y 0.

Criterios para la determinación de máximos y/o mínimos relativos de una función.

Consideremos funciones continuas, derivables o no en $x=x_0$.

Para el 1er. caso (funciones derivables) con $f'(x)=0$ se buscan los números críticos. Si la función es continua y no derivable, se investigan los valores de *x*, donde no existe derivada única.

Es importante conocer criterios que permitan decidir si en los números críticos existe máximo relativo , mínimo relativo, o ni uno ni otro.

Criterio del signo de Δy

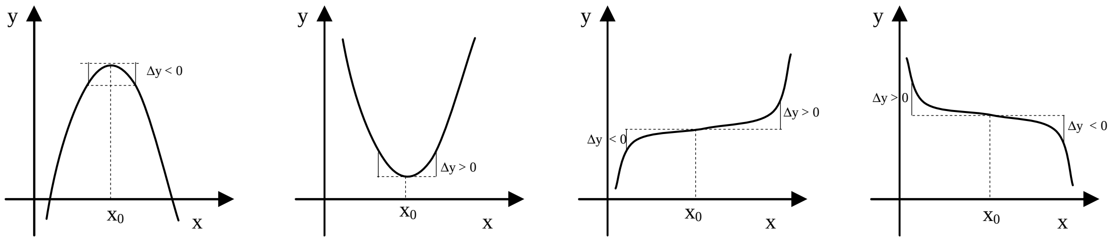
De acuerdo con la definición de máximo y de mínimo relativo:

Si $\Delta y < 0$ para $\forall x \in N_\delta^*(x_0)$ entonces $f(x_0)$ es un máximo relativo.

Si $\Delta y > 0$ para $\forall x \in N_\delta^*(x_0)$ entonces $f(x_0)$ es un mínimo relativo.

Se trata entonces de, determinar la expresión de Δy en $x=x_0$ y en ella se analiza el signo a la izquierda y a la derecha de x_0. Si Δy no mantiene su signo, significa que se trata de una función creciente o decreciente y por lo tanto no hay máximo ni mínimo.

Para aplicar este método la función debe ser continua pudiendo ser derivable o no.



Máximo local en x_0 | Hay Mínimo local | No hay extremos | No hay extremos

Ej. Encuentre los extremos de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

i) Obtener los números críticos $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

ii) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

iii) Determinar Δy en x=0;

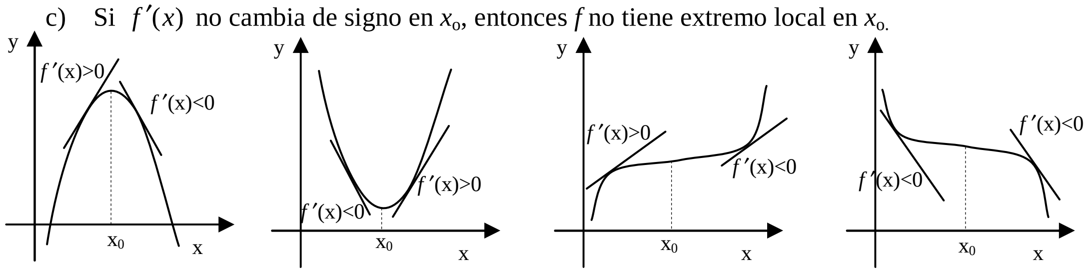
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{1+x^2}\ ;\ [\Delta y]_{x=0} = \frac{1}{1+(\Delta x)^2} - 1 = \frac{1-1-(\Delta x)^2}{1+(\Delta x)^2}$$

$[\Delta y]_{x=0} = \dfrac{-(\Delta x)^2}{1+(\Delta x)^2}$; $\forall x \neq 0$ es $\Delta y < 0$; por lo tanto hay Máximo relativo en x=0. El valor máximo es $f(0) = 1$.

Criterio del signo de la derivada primera de la función en un entorno reducido de x0.

x_o es un punto crítico de una función continua en $[a, b]$.

a) Si $f'(x) > 0$ para $a < x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x_0 < x < b$ (esto es f' cambia de positiva a negativa en x_0), entonces f tiene un máximo local en x_0.
b) Si $f'(x) < 0$ para $a < x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para $x_0 < x < b$ (esto es f' cambia de a negativa a positiva en x_0), entonces f tiene un mínimo local en x_0.
c) Si $f'(x)$ no cambia de signo en x_o, entonces f no tiene extremo local en x_o.



Máximo local | Mínimo local | No hay extremos | No hay extremos

<u>Prueba:</u>
Si x_o es un número crítico de una función f continua en $[a, b]$ todo el resto de la Hipótesis y la tesis están bien.

En el caso de un máximo local:

Si $a < x < x_o$: $\Delta y = f(x_o - \Delta x) - f(x_o) < 0.$

Si f es derivable $\forall x : a < x < x_o$

$$f´(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o - \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} > 0 \qquad (\Delta x < 0)$$

Si $x_o < x < b$: $\quad \Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) < 0$

Si f es derivable $\forall x : x_o < x < b$

$$f´(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} < 0 \qquad (\Delta x > 0)$$

Entonces: si $\Delta y < 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0)^- > 0 \\ f'(x_0)^+ < 0 \end{cases}$ para $\forall x \in N^*_\delta(x_0)$ con $\Delta x \le \delta$. Como la condición $\Delta y < 0$ implica un máximo entonces: $f(x_0)$ es máximo $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)^- > 0 \\ f'(x_0)^+ < 0 \end{cases}$

Es decir $f(x_0)$ es máximo si la derivada cambia de signo en x_0, pasando de positivo a negativo.

Ej. Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x(1-x)^{2/5}$ y trazar su gráfica.
i) Se encuentran los números críticos de *f*:

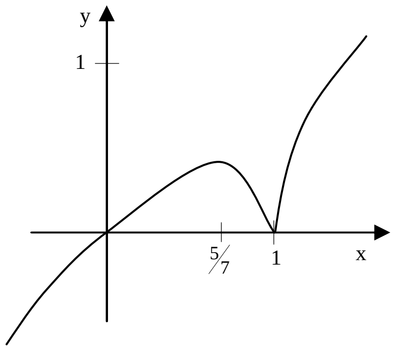
$f'(x) = \dfrac{5-7x}{5(1-x)^{3/5}}$; $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$; Además $f'(x)$ no existe si $x = 1$

Los números críticos son $\frac{5}{7}$ y 1.

$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x < 5/7 \\ f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x > 5/7 \end{array}\right\}$ por el criterio de la primera derivada tiene un máximo relativo en $5/7$ y el máximo relativo vale: $f(5/7) = \frac{5}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{2/5}$.

$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < 1 \\ f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > 1 \end{array}\right\}$ $f(1) = 0$ es un mínimo relativo.

Observe que $f'(1)$ no existe!!

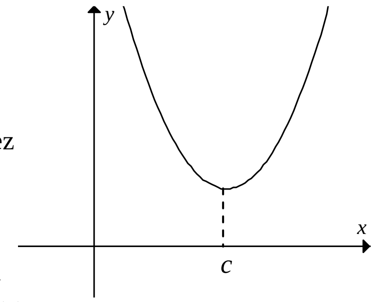


Ej. Retome la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y determine los extremos relativos usando el criterio de la primera derivada.

Criterios del signo de la derivada segunda

Suponga que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a *c*.

a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces *f* tiene un mínimo local en *c*.
b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces *f* tiene un máximo local en *c*.



Prueba: $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - 0}{x - c}$

En el caso a) donde $f''(c) > 0$:

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x) - 0}{x - c} > 0$, por lo tanto habrá un intervalo (α, β), tal vez pequeño, en torno a c donde: $\dfrac{f'(x)}{x - c} > 0;\ x \neq c$, pero esta desigualdad implica $f'(x) < 0$ para $\alpha < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < \beta$. Por lo tanto, por la prueba de la primera derivada $f(c)$ es un mínimo relativo.

La prueba b) de manera semejante.

El criterio de la derivada segunda no proporciona información cuando $f''(c) = 0$. Este criterio también falla cuando $f''(c)$ no existe.

No obstante se prueba (no lo haremos) que si $f''(c) = 0$, se sigue derivando y se ve el orden de la primera derivada no nula:

a) Si la primera derivada no nula posterior a la segunda, es de orden par, se analiza el signo: $\left\langle \begin{array}{l} > 0 \Rightarrow \text{mínimo } en\ x = c \\ < 0 \Rightarrow \text{máximo } en\ x = c \end{array} \right.$

b) Si la primera derivada no nula posterior a la segunda, es de orden impar, no hay máximo ni mínimo en $x = c$.

Estudie máximos y mínimos relativos de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, con los tres criterios.

Teorema de Rolle

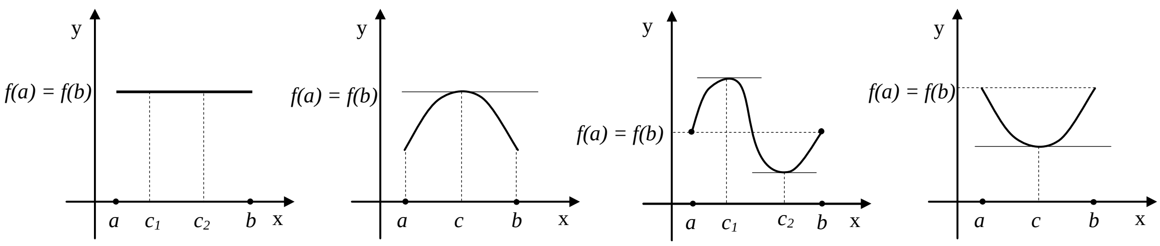
Sea f una función que satisface las siguientes hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*], donde $a < b$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (*a*, *b*).
3. *f(a) = f(b).*

   Entonces, existe *c* en (*a*, *b*) tal que $f'(c) = 0$

Desde el punto de vista geométrico, el teorema de Rolle es ciertamente plausible. Si la gráfica de una función continua toma el mismo valor en dos puntos y tiene una tangente en todo punto entre estos dos, debe entonces tener una tangente horizontal en algún punto intermedio. Notemos que el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto con tangente horizontal. Puede que haya más de un punto.

Antes de proporcionar la demostración del teorema, examinemos las gráficas representativas.

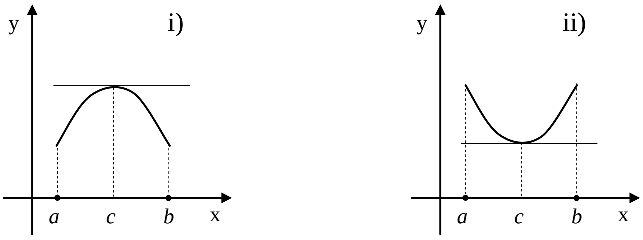


En cada cada caso se ve que existe, por lo menos, un punto (*c*, *f(c)*) en donde la tangente es horizontal y por lo tanto $f'(c) = 0$.

<u>Demostración.</u> Existen dos casos posibles:

<u>Caso I:</u> $f(x) = k$; es decir f es constante; entonces $f'(x) = 0$, así que el número c puede ser cualquiera del (*a*, *b*).

Caso II: $f(x)$ sigue una ley cualquiera



i) $f(x) > f(a)$

Por el teorema de los valores extremos *f* toma un valor máximo en algún punto de $[a,b]$.

$f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$ para $\Delta x > 0$ y para $\Delta x < 0$

Si $\Delta x > 0$: $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$

Si $\Delta x < 0$: $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$

tomando límite cuando $\Delta x \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0 \text{ si } \Delta x > 0 \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0 \text{ si } \Delta x < 0 \end{array}\right\} *$$

$f'(c)$ es a la vez ≥ 0 y ≤ 0, entonces la única posibilidad es que sea cero ya que la derivada en un punto es única (por hipótesis), luego $f'(c) = 0$.

Aplicación del teorema de Rolle

Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raiz real.

Uso el el T. del valor intermedio (continuidad)

Sea $f(x) = x^3 + x - 1 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow f(0) < 0 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(c) = 0$ para $0 < c < 1$

Para probar que no hay otra raiz entre 0 y 1 se aplica Rolle y se razona por contradicción.

Supongamos que la ecuación tiene dos raices a y b, entonces $f(a) = f(b) = 0$

Como *f* es un polinomio, es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y por Rolle $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 1$

$3x^2 + 1 = 0 \qquad \nexists\, x \in \mathbf{R} \,/\, 3x^2 + 1 = 0$.

Esta contradicción provino de suponer que hay 2 raices.

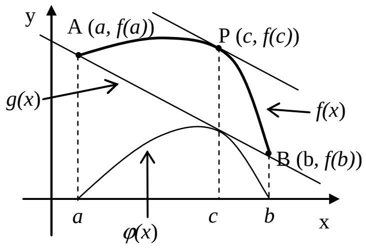
La principal aplicación del Teorema de Rolle radica en la demostración del Teorema de otro matemático francés, Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), el Teorema del Valor Medio.

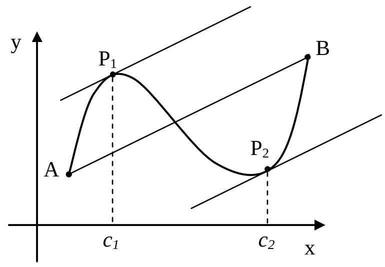
Teorema del Valor Medio (de Lagrange)

Sea f una función que satisface las siguientes hipótesis:
f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
f es derivable en el intervalo abierto (a,b).
Entonces existe un número c en (a,b) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Antes de demostrar este teorema, interpretemos geométricamente:





La pendiente de la recta secante AB es $m_{AB}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Puesto que $f'(c)$ es la pendiente de la tangente en el punto $(c,\, f(c))$; el T, del V. Medio, dice que existe por lo menos un punto $P(c,\, f(c))$ de la gráfica, en donde la pendiente de la tangente es igual a la pendiente de la secante AB. En otras palabras, existe un punto *P* en donde la tangente es paralela a la secante AB.

Demostración: Definiremos una función φ como la diferencia entre f y la función lineal definida por los puntos A y B (llamemos g a esta función lineal)

Luego: $\varphi(x)=f(x)-g(x)$
Aplicando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y=m(x-x_1)+y_1$$

Como $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y tomando $(x_1,y_1)=(a,\, f(a))$, resulta

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\text{, entonces:}$$

$\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$; esta función φ es continua en $[a,b]$, porque es la resta de dos funciones continuas.
La función φ es derivable en (a, b), porque tanto f como g son derivable en (a, b).

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a)&=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)-f(a)=0\\ \varphi(b)&=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-f(a)=f(b)-f(b)+f(a)-f(a)=0\end{aligned}\right\}\quad \varphi(a)=\varphi(b)$$

Por lo tanto la función φ satisface las hipótesis del T. de Rolle. Entonces existe $c\in(a,b)\,/\,\varphi'(c)=0$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Ilustración del teorema

Ej.1 Encuentre el número *c* garantizado por el T. del V. Medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[1,4]$

i) Verificar las hipótesis del T.V.M.

Solución: $f'(x) = 2.\frac{1}{2}.x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$, por lo tanto tenemos que resolver la ecuación $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$; la solución es $c = \frac{9}{4}$

Ej.2 Sea $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ en el intervalo $[-1,2]$. Encuentre todos los números que satisfacen la conclusión del T. del Valor Medio.

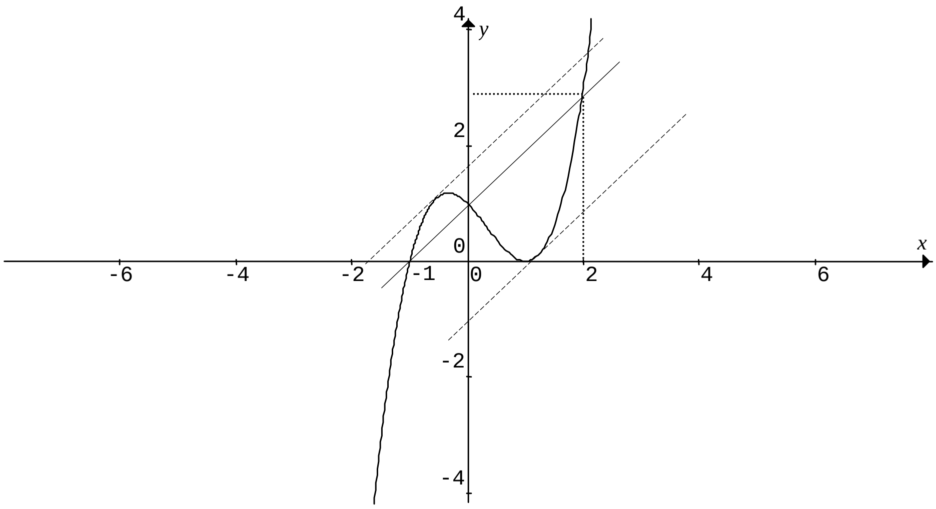
i)Verificar las hipótesis del T.V.M.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

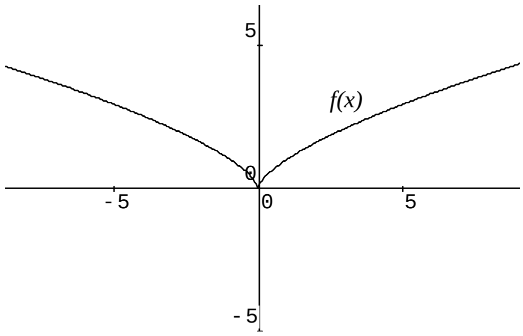
$\frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \frac{3-0}{3} = 1$

Debemos resolver la ecuación $3c^2 - 2c - 1 = 1$

hay dos soluciones $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$, ambos números están en el intervalo $(-1,2)$.



Ej. 3 Sea $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-8,27]$. Demuestre que la conclusión del T. del V. medio falla y descubra porqué.



Solución: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$; $x \neq 0$

$\frac{f(27) - f(-8)}{27-(-8)} = \frac{9-4}{35} = \frac{1}{7}$

Debemos resolver : $\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7} \Rightarrow c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \cong 102$

Pero $c=102$ no está en el intervalo $(-8,27)$. El problema es que *f* no es derivable en el $(-8,27)$, ya que $f'(0)$ no existe. Esto pasó por no verificar las hipótesis del T del V. Medio.

Teorema del Valor Medio Generalizado (T. de Cauchy)

Sean f y φ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo (a,b) y $\varphi'(x)\neq 0 \ \ \forall x\in(a,b)$, entonces existe por lo menos un *c* perteneciente al intervalo (a,b), tal que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

O sea que la relación o cociente de los incrementos de las funciones es igual a la relación o cociente de las derivadas en los puntos "*c*" intermedios.

Demostración: A los fines de que se pueda demostrar, debe cumplirse: $\varphi(x)\neq 0$ y $\varphi(b)\neq\varphi(a)$

Hagamos $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=A$ ①

Demostraremos que $A=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, para ello de ① despejamos:

$f(b)-f(a)=A(\varphi(b)-\varphi(a))$

$f(b)-f(a)-A(\varphi(b)-\varphi(a))=0$ ②

Reemplazando *a* por *x*, queda la expresión anterior (que era una constante) expresada como una función de x, que llamaremos *h(x):*

$$h(x)=f(b)-f(x)-A(\varphi(b)-\varphi(x))$$

Verificamos si *h(x)* cumple las condiciones de Rolle, y si se cumple, aplicaremos este teorema para demostrar el T. Cauchy.
El T. de Rolle exige que la función debe ser continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y además $h(a)=h(b)$.
La función *h* es suma de funciones continuas y derivables.
Verifiquemos que $h(a)=h(b)$

$h(a)=f(b)-f(a)-A(\varphi(b)-\varphi(a))=0$ por ②

$h(b)=f(b)-f(b)-A(\varphi(b)-\varphi(b))=0$, o sea que se cumplen todas las condiciones de Rolle y por lo tanto, existe por lo menos un *c* que pertenece al intervalo (a,b) tal que $h'(c)=0$

$h'(x)=0-f'(x)+A\varphi'(x)$

$h'(c)=-f'(c)+A\varphi'(c)=0$

$$A\varphi'(c)=f'(c)\Rightarrow A=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Luego: $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

Ej: Pruebe si es posible el Teorema de Cauchy a las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5x & si \quad x<4\\ x \quad si & x\geq 4\end{cases} \qquad g(x)=-x+3$$

en $[2,6]$ y $[-1,2]$

Como f no es derivable en $x=4\in(2,6)$ no se puede aplicar Cuachy; en el intervalo $[-1,2]$ se cumplen todas las exigencias $\Rightarrow \exists c\in(-1,2)$ tal que :

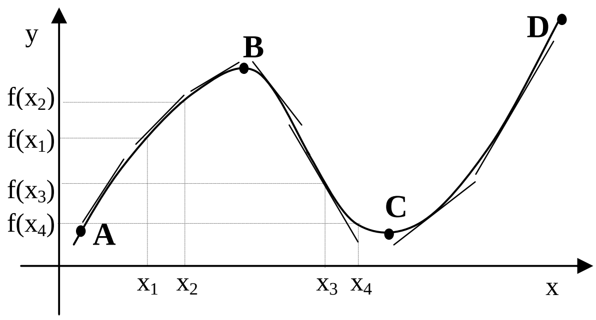
$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\frac{6-(-6)}{1-4}=\frac{-2c+5}{-1} \qquad \therefore c=\frac{1}{2}$$

Función creciente, decreciente y monótona

Definición:

Una función se llama *creciente* en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.
Una función se llama *decreciente* en un intervalo I si $f(x_3) > f(x_4)$ siempre que $x_3 < x_4$ en I.
Las definiciones anteriores corresponden a funciones *estrictamente creciente* o *estrictamente decreciente.*
Si cambiamos los signos $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$ obtendremos las definiciones de crecimiento y decrecimiento en sentido amplio.
Una función es *monótona* en un intervalo I, si es creciente o decreciente.



En la definición de función creciente es importante tener claro que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe satisfacerse para todo par de números x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$.
La función $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. (Hágase una ilustración gráfica). Por lo tanto, f es monótona en $(-\infty, 0]$ y en $[0, \infty)$, pero no es monótona en $(-\infty, \infty)$.

Para ver cómo puede ayudar la derivada para determinar en dónde una función es creciente o decreciente, considérese la siguiente figura. Observamos que donde la pendiente de la tangente es positiva, la función es creciente, y donde la pendiente de la tangente es negativa, la función es decreciente. Se sabe que $f'(x)$ es la pendiente de la tangente en $(x, f(x))$. Así, parece que la función crece cuando $f'(x) > 0$ y decrece cuando $f'(x) < 0$. Para demostrar que esto es verdadero se aplica el Teorema del Valor Medio.

Criterio para Funciones Monótonas (*)

Teorema (1):

Supóngase que *f* es continua en $[a, b]$ y derivable en (a,b).

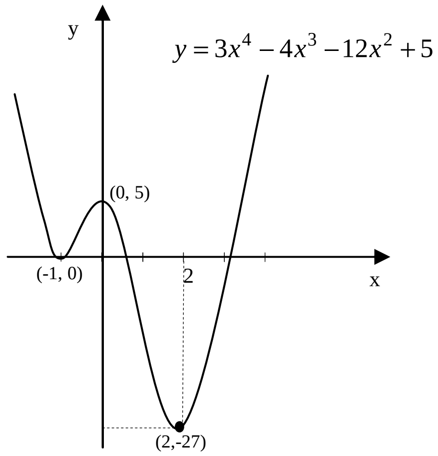
(a) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces *f* es creciente en $[a, b]$.

(b) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces *f* es decreciente en $[a, b]$.

Demostración:

(a) Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a,b]$ con $x_1 < x_2$. Entonces *f* es continua en $[x_1, x_2]$ y diferenciable en (x_1, x_2), así que por el Teorema del Valor Medio existe un número *c* entre x_1 y x_2 tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad ①$$



Ahora bien, $f'(c) > 0$ por hipótesis y $x_2 - x_1 > 0$ porque $x_1 < x_2$. Por consiguiente, el segundo miembro de la ecuación ① es positivo, y entonces

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{o} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Esto demuestra que *f* es creciente en $[a,b]$.
La parte (b) se prueba de manera semejante.

Ej. Encontrar los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y en los que es decreciente.

Solución $\quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$

Para utilizar el Teorema se debe saber en dónde $f'(x) > 0$ y en donde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, 12x, x – 2 y x +1. La siguiente tabla proporciona la conclusión con base en el teorema. A partir de esta información y de los valores de f en los números críticos, trazamos la gráfica de f como se muestra en la figura.

Intervalo	12x	x - 2	x + 1	f'(x)	f
$x < -1$	-	-	-	-	decreciente en $(-\infty,-1]$
$-1 < x < 0$	-	-	+	+	creciente en [-1, 0]
$0 < x < 2$	+	-	+	-	decreciente en [0,2]
$x > 2$	+	+	+	+	creciente en $[2,\infty)$

Recuérdese el Teorema de Fermat, que si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c debe ser un número crítico de *f*, pero no todo número crítico da lugar a un valor extremo. Por lo tanto, se requiere un criterio para determinar si f tiene o no un extremo local en un número crítico.

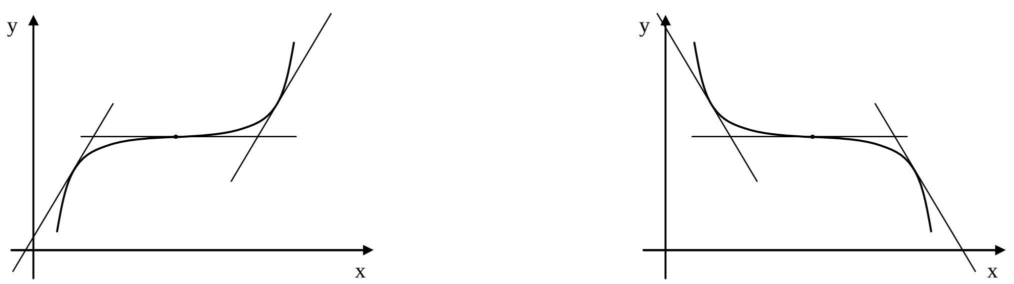
Teorema (2):

Sea $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, derivable en todo punto:

a) Si f es creciente, entonces $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$

b) Si f es decreciente, entonces $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$

Sólo interpretaremos geométricamente (se omite la demostración).

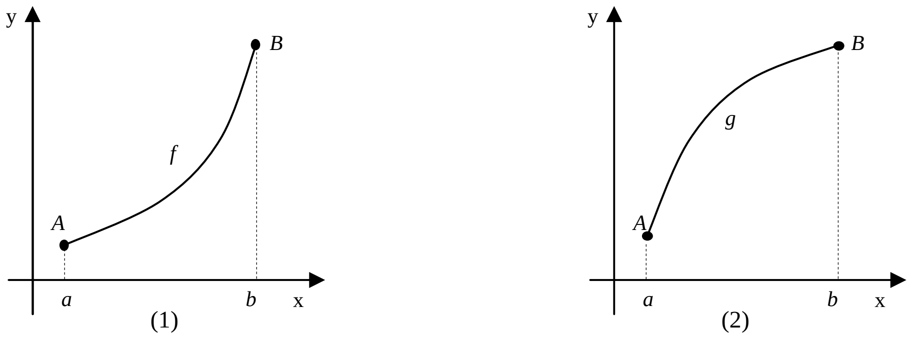


Concavidad y Puntos de Inflexión

Hemos visto que el conocer la primera derivada de una función es útil para trazar su gráfica. En esta sección veremos, con la ayuda del Teorema del Valor Medio, que la segunda derivada proporciona información adicional que permite hacer un mejor trazo de la gráfica.

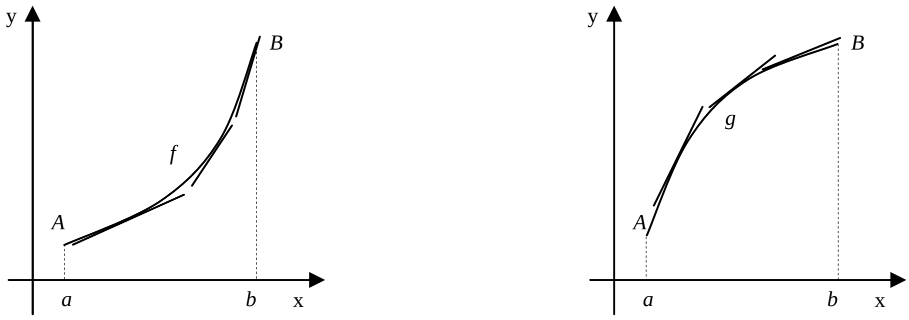
En la figura (i) se muestran las gráficas de dos funciones crecientes en $[a, b]$. Ambas gráficas unen el punto A con el punto B, pero se ven diferentes porque se inclinan en direcciones diferentes. ¿Cómo distinguir entre estos dos tipos de comportamiento?. En la figura (ii) se trazaron tangentes a estas curvas en varios puntos. En (1) la curva se encuentra arriba de las tangentes y f se llama *cóncava hacia arriba* en $[a, b]$. En (2) la curva se encuentra debajo de las tangentes y g de llama *cóncava hacia abajo* en $[a, b]$.

figura (i)



(1) (2)

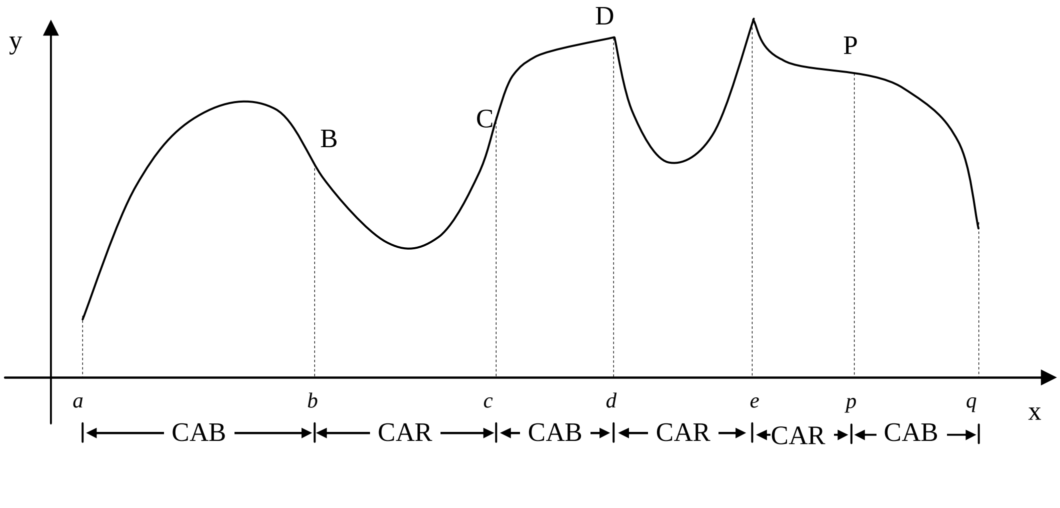
figura (ii)



(1) Cóncava hacia arriba (2) Cóncava hacia abajo

<u>Definición:</u> Si la gráfica de f se encuentra arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, entonces se llama **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f se encuentra debajo de todas sus tangentes, se llama **cóncava hacia abajo** en I.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CAR) en los intervalos $[b, c)$, $[d, e)$ y $(e, p]$ y cóncava hacia abajo (CAB) en los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[p, q]$.



Veamos cómo ayuda conocer la segunda derivada para determinar los intervalos de concavidad. Observando la figura (ii) (1), vemos que, yendo de izquierda a derecha, la pendiente de la tangente aumenta. Esto significa que la derivada $f'(x)$ es positiva. Del mismo modo, en la (ii)(2) la pendiente decrece de izquierda a derecha, de modo que $f'(x)$ es decreciente y, por lo tanto $f'(x) < 0$. Este razonamiento se puede invertir con lo que sugiere la veracidad del siguiente teorema.

Criterio de Concavidad

Supóngase que f es dos veces diferenciable en un intervalo I.

(a) Si $f''(x) > 0$, para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

(b) Si $f''(x) < 0$, para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

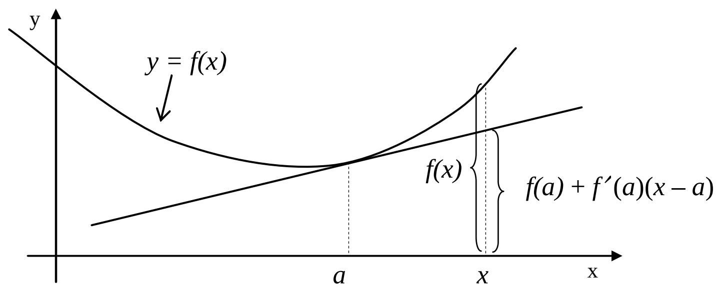
<u>Demostración de (a):</u> Sea a cualquier número en I. Debemos demostrar que la curva $y = f(x)$ se encuentra arriba de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de esta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Así que, debemos demostrar que:

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$$

cuando $x \in I$ $(x \neq a)$.



Consideremos primero el caso en que $x > a$. Si aplicamos el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[a, x]$, obtenemos un número c, con $a < c < x$, tal que:

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) \quad ①$$

Puesto que $f'' > 0$ en I, del teorema (* Criterio para Funciones Monótonas) se deduce que f' es creciente en I. Por consiguiente, puesto que $a < c$, se tiene que:

$$f'(a) < f'(c)$$

y entonces, multiplicando esta desigualdad por el número positivo $x - a$, se obtiene

$$f'(a)(x-a) < f'(c)(x-a) \quad ②$$

Ahora sumamos $f(a)$ a ambos miembros de esta desigualdad:

$$f(a) + f'(a)(x-a) < f(a) + f'(c)(x-a)$$

Pero de la ecuación ① tenemos que $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$. Así que esta desigualdad se convierte en:

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad ③$$

que es lo que se quería probar.

Para el caso en que $x < a$ tenemos que $f'(c) < f'(a)$, pero la multiplicación por el número negativo $x - a$ invierte la desigualdad, de manera que se obtienen ② y ③ como antes.

Punto de inflexión

Definición: Un punto P de una curva se llama **punto de inflexión** si la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en P.

Por ejemplo, en la figura (iii), B, C, D y P son puntos de inflexión. Obsérvese que si una curva tiene tangente en un punto de inflexión, entonces la curva cruza a su tangente en ese punto.

Por el criterio de concavidad, existe un punto de inflexión en todo punto en donde la segunda derivada cambia de signo.

Ej. Determine en dónde la curva $y = x^3 - 3x + 1$ es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de la curva.

Si $f(x) = x^3 - 3x + 1$, entonces

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3.(x^2 - 1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$, cuando $x^2 = 1$, los números críticos son ± 1. Además

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

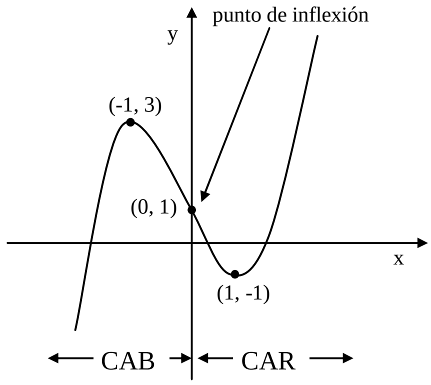
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -1$$

Por lo tanto, f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ y es decreciente en $[-1, 1]$. Por el Criterio de la Primera derivada, $f(-1) = 3$ es un valor máximo local y $f(1) = -1$ es un valor mínimo local.

Para determinar la concavidad se calcula la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x$$

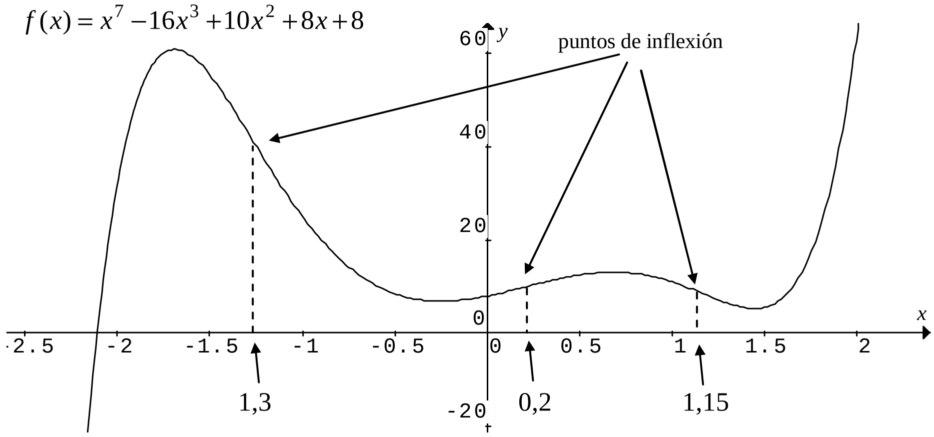
Así que $f''(x) > 0$, cuando $x > 0$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < 0$. Luego, el Criterio de Concavidad dice que la curva es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Puesto que la curva cambia de concavidad cuando x = 0, el punto (0, 1) es un punto de inflexión. Esta información se utiliza para trazar la gráfica de la curva mostrada en la figura.



Los puntos donde la $f''(x)$ no existe o donde $f''(x) = 0$ y cambia el sentido de la concavidad, son los candidatos a ser punto de inflexión. Además para ser punto de inflexión debe ser continua en dicho punto.

En el siguiente ejemplo se puede observar la concavidad y puntos de inflexión:

$$f(x) = x^7 - 16x^3 + 10x^2 + 8x + 8$$



cóncava hacia arriba en los intervalos : $(1.3, 0.2)$, $(1.15, \infty)$

cóncava hacia abajo : $(-\infty, 1.3)$, $(0.2, 1.15)$

Regla de L' Hopital

Indeterminaciones:

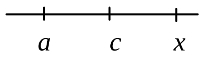
$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0.\infty$ $\infty-\infty$ 0^0 $1^{\pm\infty}$ ∞^0

Sean F y G dos funciones derivables en un entorno reducido de a y $G'(x)\neq 0$ en todo punto de dicho entorno y $\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} G(x)=0$

a) **Indeterminación** $\frac{0}{0}$

Sea $f(x)=\dfrac{f(x)}{G(x)}$ y en $x=a\begin{cases}F(a)=0\\G(a)=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ cuando tenemos $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{0}{0}}$ <u>indeterminación</u> ; $a<c<x$



aplicamos el T. de Cauchy $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\dfrac{F'(c)}{G'(c)}$

$\Rightarrow$ cuando $x\to a$

$c\to a$ (porque siempre c está entre x y a)

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

Porque *F(a)* = 0
y *G(a)* = 0

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}}=\lim_{c\to a}\frac{F'(c)}{G'(c)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}}$$

<u>Observación</u>: si $F'(x)$ y $G'(x)$ cumplen las condiciones del T. de Cauchy y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\dfrac{0}{0}$, siempre que $\exists\, F''(x)$ y $G''(x)$
se puede calcular

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)}$$

<u>Resumen de los pasos a seguir:</u>

1. Operación de paso al límite.
2. Derivar numerador y denominador independientemente.
3. Paso al límite para saber si se levantó la indeterminación.
4. Si no se levantó la indeterminación $\frac{0}{0}$ se repite el paso 2.

b) Indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$

Sea $f(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ y en $x=a\begin{cases}F(a)=\infty\\G(a)=\infty\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{\infty}{\infty}=V \text{ (verdadero valor)}$$

$$V = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{1}{G(x)}}{\dfrac{1}{F(x)}} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

$$V = \lim_{x \to a} \frac{-\dfrac{G'(x)}{G^2(x)}}{-\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{G'(x)}{F'(x)} \cdot \frac{F^2(x)}{G^2(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{G'(x)}{F'(x)} \cdot \left[\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} \right]^2$$

$$V = \lim_{x \to a} \frac{G'(x)}{F'(x)} . V^2$$

$$\frac{V}{V^2} = \lim_{x \to a} \frac{G'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{V} \Rightarrow \boxed{V = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)}}$$

Conclusión: se opera con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ como si fuera $\frac{0}{0}$

c) **Indeterminación** $0.\infty$

$$f(x) = F(x).G(x) \quad \text{y en } x = a \begin{cases} F(a) = 0 \\ G(a) = \infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} F(x).G(x) = 0.\infty$$

Haciendo $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{\dfrac{1}{G(x)}} = \frac{0}{\dfrac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

en cualquiera de los dos casos operamos aplicando regla de L'Hopital

ó

$$\lim_{x \to a} \frac{G(x)}{\dfrac{1}{F(x)}} = \frac{0}{\dfrac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

d) **Indeterminación** $\infty - \infty$

$$f(x) = F(x) - G(x) \quad \text{y en } x = a \begin{cases} F(a) = \infty \\ G(a) = \infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} F(x) - G(x) = \infty - \infty$$

Hacemos $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{1}{\dfrac{1}{F(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{G(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{1}{G(x)} - \dfrac{1}{F(x)}}{\dfrac{1}{F(x)} . \dfrac{1}{G(x)}} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ L' Hopital

d) Indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞

$$f(x) = F(x)^{G(x)} \rightarrow \lim_{x \to a} F(x)^{G(x)} = 0^0, \ \infty^0, \text{ó } 1^\infty$$

tomando ln en ambos miembros para bajar el exponente

$$\ln \lim_{x\to a} F(x)^{G(x)} = \lim_{x\to a} G(x).\ln F(x)$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} G(x)}_{0}.\ln \underbrace{\lim_{x\to a} F(x)}_{\infty}$$

en cualquiera de los 3 casos da $0.\infty$ ó $\infty.0$

$\Rightarrow$ a partir de aquí trabajamos transformando en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ como ya vimos y aplicamos L' Hopital.

Entonces lo que obtendremos no es el resultado, hace falta aplicar antilogaritmo.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} F(x)^{G(x)} = e^{R\ (resultado\ de\ L'Hopital)}$$

Ejemplos:

$\boxed{\frac{0}{0}}$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \frac{2^x \ln 2}{1} = \ln 2$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x.\operatorname{tg} x}{6x} = \frac{4\sec x.\frac{\sec x}{\cos^2 x}.\operatorname{tg} x + 2.\sec^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$

$\boxed{0.\infty}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

$\boxed{\infty - \infty}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - x^4}{x^4.x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(1-x^2)}{x^2.x^4} = \infty$

$\boxed{0^0}$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \ell$

$$\ln \ell = \ln \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim_{x\to 0^+} x.\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$\therefore\ e^0 = 1 = \ell$

$\boxed{1^\infty}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot gx} = \ell$

$$\ln \ell = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{\text{cotg x}} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\text{cotg x}} = \lim_{x\to 0} \text{cotg x}.\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

$\therefore\ \ln \ell = 1 \Rightarrow \ell = e$

$\boxed{\infty^0}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \ell$

$$\ln \ell = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x.\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{x^2}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}.\frac{x}{\cos x} = 0$$

$\therefore\ \ell = 1$