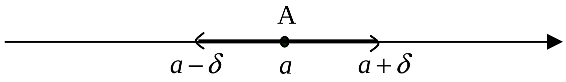
Entornos

Definición: Consideremos el punto A perteneciente al eje "x" y de abscisa "a", y un número real positivo "δ" . Se define como **Entorno** del punto "a" con radio δ, al intervalo:

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, a-\delta < x < a+\delta\} = N_\delta(a)$$

que también puede simbolizarse como:

$N_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, |x-a| < \delta\}$

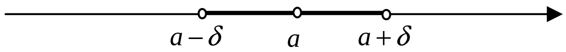


El punto de abscisa a, pertenece a su entorno, cualquiera sea δ >0 .
Como la definición de "entorno" depende del valor arbitrario δ >0, se deduce que para cualquier punto de la recta no existe un único entorno, sino una infinidad.

Entorno reducido:

<u>Entorno reducido</u> de un punto de abscisa a con radio δ, es el conjunto de puntos que pertenecen al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ con exclusión del punto a, o sea:

$$N^*_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, a-\delta < x < a+\delta \wedge x \neq a\} = \{x \in \mathbf{R} \,/\, 0 < |x-a| < \delta\}$$



Clasificación de los puntos sobre la recta:

Punto de acumulación

Supongamos un conjunto $S \subset \mathbf{R}$. Se dice que a es un punto de acumulación de S sii $\forall N^*_\delta(a), \exists x \in S$ tal que $x \in N^*_\delta(a)$. O bien $\forall N^*_\delta(a) : N^*_\delta(a) \cap S \neq \phi$.
El punto a puede o no pertenecer a S.

Conjunto Derivado:

Un conjunto S' se llama derivado de S si está formado por todos los puntos de acumulación de S.

Conjunto Cerrado:

Un conjunto se llama cerrado, si contiene todos sus puntos de acumulación. Si $S' \subseteq S$, se dice que S es cerrado.

Punto Interior:

Un punto $a \in S$, se dice que es interior a S, si existe algún entorno $N_\delta(a) \,/\, N_\delta(a) \subset S$.
<u>Otra definición similar:</u> Se dice que a es interior al conjunto S si se verifican las siguientes condiciones:

1) $a \in S$
2) $N_\delta(a) \subset S$

Conjunto Abierto:

S es un conjunto abierto, si todo punto de S, es punto interior de S, o sea si todos los puntos de S son interiores.

Punto Exterior:

Un punto $a \in \mathbf{R}$ se llama exterior a *S*, si existe al menos un $N_\delta(a) / N_\delta(a) \cap S = \phi$.
Otra definición similar: Se dice que *a* es exterior al conjunto *S* si se verifican las siguientes condiciones:

1) $a \notin S$
2) $\exists\, N_\delta(a) / N_\delta(a) \cap S = \phi$

Punto Aislado:

Un punto $a \in S$, se llama aislado de *S* sií $\exists N_\delta(a) / N_\delta(a) \cap S = \{a\}$ o bien sií $\exists N_\delta^*(a) \cap S = \phi$.
Un punto aislado no es de acumulación. En otras palabras, un punto de aislado de *S* es un punto *a* perteneciente a *S* que no es punto de acumulación de *S*.

Punto Frontera:

Un punto *a* es punto frontera de *S* sií $\forall N_\delta(a) : N_\delta(a) \cap S \neq \phi \wedge N_\delta(a) \cap S^c \neq \phi$
Un punto frontera puede o no pertenecer al conjunto. No es interior ni exterior.

Conjunto Frontera:

Es el conjunto formado por todos los puntos fronteras del conjunto S. Se lo simboliza δS ó front(S).

Punto de Adherencia:

Un punto *a* se llama de adherencia de *S* sií $\forall N_\delta(a) : N_\delta(a) \cap S \neq \phi$.
El punto *a* puede o no pertenecer al conjunto S.

Conjunto Clausura o Adherencia:

de un conjunto S, es el formado por todos los puntos de adherencia se S y se lo designa por $\overline{S}$.

Cotas. Extremos superior e inferior

Sea el conjunto $S \subset \mathbf{R}$

Definición: Un elemento $k \in \mathbf{R}$ es Cota superior de *S* si $\forall x \in S,\ es\ x \leq k$. Si existe *k*, diremos que *S* es un conjunto acotado superiormente.

Ej: $S = [3,6]$; 6 es cota superior de *S*; también lo son 6,01; 10,5 etc.

Si hay una cota superior, hay infinitas.
$k \in \mathbf{R}$ es Cota inferior de S si $\forall x \in S$ es $x \geq k$
Ej: $S = [3,6]$; 3 es cota inferior de *S*; 2,99 y –0,10 también lo son.

Diremos que *S* está acotada, cuando lo está superior e inferiormente.

Se llama Extremo superior u supremo de *S* a la menor de las cotas superiores (Sup. *S*)

Ej: $S = [3,6)$; el Sup.S=6; $6 \notin S$
Ej: $S = [3,6]$; el Sup.S=6; $6 \in S$

Si el supremo pertenece al conjunto, recibe el nombre de máximo del conjunto.
Si el extremo pertenece al conjunto se dice que es un "extremo accesible". Caso contrario: extremo inaccesible.

El ínfimo* y/o el supremo, si existen, son únicos.

* Infimo de S o extremo inferior de S, es la mayor de las cotas inferiores.

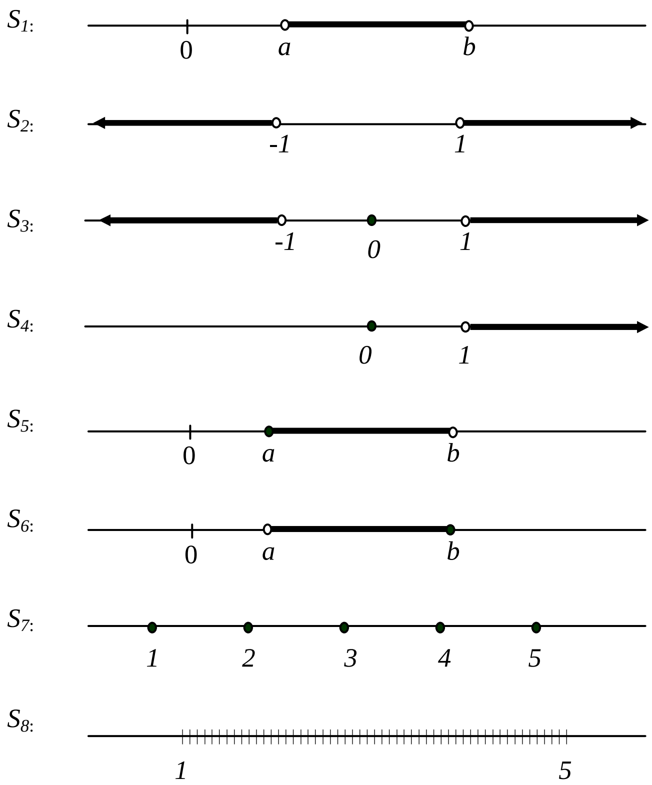
Ejemplos

Supongamos $S \subset \mathbf{R}$; se pide que represente c/u de los siguientes conjuntos:

$S_1 = \{x \in \mathbf{R} / a < x < b\}$ $S_2 = \left\{x \in \mathbf{R} / \sqrt{x^2 - 1} \in \mathbf{R}\right\}$ $S_3 = \left\{x \in \mathbf{R} / x\sqrt{x^2 - 1} \in \mathbf{R}\right\}$

$S_4 = \left\{x \in \mathbf{R} / x\sqrt{x - 1} \in \mathbf{R}\right\}$ $S_5 = \{x \in \mathbf{R} / a \le x < b\}$ $S_6 = \{x \in \mathbf{R} / a < x \le b\}$

$S_7 = \{x \in \mathbf{N} / 1 \le x \le 5\}$ $S_8 = \{x \in \mathbf{Q} / 1 \le x \le 5\}$ $S_9 = \mathbf{R}$



<u>Puntos de Acumulación</u>

Conjunto S_1:
a es punto de acumulación, $a \notin S_1$
b es punto de acumulación, $b \notin S_1$
c de abscisa $c = \frac{1}{2}(a+b)$ es punto de acumulación, $a \in S_1$
0 el origen no es punto de acumulación

Conjunto S_2:
0 el origen no es punto de acumulación, pues para δ=0,5 no se verifica la condición:
$\forall N^*_\delta(a) : N^*_\delta(a) \cap S \neq \phi$.
-1 es punto de acumulación, $1 \in S_2$
$\frac{1}{2}$ tampoco es de acumulación.

Conjunto S_3:

0 el origen no es punto de acumulación ($0 \in S_3$), pues la definición se refiere a un entorno reducido.
Tomando $\delta = 1$ no se verifica la condición: $\forall N^*_\delta(a) : N^*_\delta(a) \cap S \neq \phi$

Conjunto S_4:
0 no es punto de acumulación por la razón dada en el caso anterior,
1,5 es punto de acumulación.
-1,5 no es punto de acumulación.

Conjunto S_5:
a es punto de acumulación, $a \in S_5$
b es punto de acumulación, $b \notin S_5$
0 no es punto de acumulación.

Conjunto S_6 análogo a S_5

Conjunto S_7:
1 no es punto de acumulación de S_7 . Como este resultado es aplicable a los demás puntos del conjunto, se concluye que S_7 no tiene punto de acumulación.

Conjunto S_8:
1 es punto de acumulación , $1 \in S_8$
$\sqrt{2}$ es punto de acumulación, $\sqrt{2} \notin D_8$

Conjunto S_9:
Todos sus puntos son de acumulación.

Conjunto Cerrado

Conjunto S_1: no es cerrado puesto que a y b son puntos de acumulación y no pertenecen a S_1

Conjunto S_2: es cerrado

Conjunto S_3: es cerrado

Conjunto S_4: es cerrado

Conjunto S_5: no es cerrado: $b \notin S_5$

Conjunto S_6: no es cerrado: $a \notin S_6$

Conjunto S_7: el conjunto de sus puntos de acumulación es ϕ. Por convención $\phi \subset S_7$, entonces el conjunto de los puntos de acumulación está incluido en S_7. De acuerdo a esto es cerrado.

Conjunto S_8: no es cerrado: todos los irracionales mayores que 1 y menores que 5 son puntos de acumulación y no pertenecen al conjunto.

Conjunto S_9: de acuerdo a la definición es cerrado.

Punto interior al Conjunto

Conjunto S_1:
a no es interior pues no se verifica a ninguna de las dos condiciones.

Conjunto S_2:

-1 no es interior por no cumplir la condición 2)
1+0,0001 ($\delta = 0{,}0001$) es punto interior.

Conjunto S_3:
0 no es interior; verifica 1) pero no 2).
a no es interior; verifica 1) pero no 2).
C de abscisa c > 1 es interior.
M de abscisa m < 1 es interior.

Conjunto S_4:
0 no es interior
1 no es interior
C de abscisa c > 1 es interior.
M de abscisa m < 1 no es interior.

Conjunto S_5:
a no es interior
b no es interior
C de abscisa *c* tal que $a < c < b$ es punto interior.
M de abscisa mayor que *b* no es interior
P de abscisa menor que *a* no es interior

Conjunto S_6:
Similar a S_5

Conjunto S_7:
No tiene puntos interiores

Conjunto S_8:
Sea *P* de abscisa x = 3. Por ser racional *P* pertenece a S_8 y verifica la condición 1).
Sea $\delta > 0, \quad (\delta \text{ racional}), \text{ entonces } \quad (3+\delta) \text{ es racional}$.
Entre dos números racionales se pueden ubicar irracionales que pertenecerán al entorno de *P* y no pertenecen al conjunto.
No se cumple la condición 2), no tiene puntos interiores.

Conjunto S_9:
Todos sus puntos son interiores.

Punto exterior al Conjunto

Conjunto S_1:
a no pertenece a S_1, no es exterior al conjunto pues no verifica la segunda condición.
P, que no pertenece a S_1 , de abscisa ($a - \overline{\delta}$) es exterior al conjunto pues para $0 < \delta < \overline{\delta}$ se satisface la condición 2).

Conjunto S_2:
0 es exterior
a no es exterior
b no es exterior
1,5 no es exterior

Conjunto S_3:
Cero (0) no es exterior
0,5 es exterior.

Conjunto S_4:
Cero (0) no es exterior
0,5 es exterior.
Todo punto de abscisa negativa es exterior.

Conjunto S_5:
Cero (0) es exterior
a no es exterior
b no es exterior

Conjunto S_6:
Similar a S_5

Conjunto S_7:
Los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 no son exteriores. Todos los demás puntos de la recta son exteriores.

Conjunto S_8:
Sea M un punto cuya abscisa x_m es un número irracional, tal que $1 < x_m < 5$.
Este punto verifica la primera condición, pero no la segunda. No es exterior.

Conjunto S_9:
No tiene puntos exteriores.

Conjunto Abierto

Conjunto S_1:
Es un conjunto abierto

Conjunto S_2:
Loa puntos a y b pertenecientes a S_2 no son interiores. No es abierto

Conjunto S_3:
Los puntos -1, 0 y 1 pertenecientes a S_3 no son interiores. No es abierto.

Conjunto S_4:
Los puntos 0 y 1 pertenecientes al conjunto no son interiores. No es abierto.

Conjunto S_5:
$a \in S_5$ y no es interior. No es abierto.

Conjunto S_6:
b pertenece a S_6 y no es interior. No es abierto.

Conjunto S_7:
Todos los puntos del conjunto no son interiores. No es abierto.

Conjunto S_8:
Sus puntos no son interiores. No es abierto.

Conjunto S_9:
Todos sus puntos son interiores, por lo tanto es un conjunto abierto. También es cerrado. Este hecho no es contradictorio dado que ambas definiciones no son excluyentes.

Punto frontera

Conjunto S_1:
a y b son puntos frontera.

Conjunto S_2:
-1 y 1 son puntos frontera.

Conjunto S_3:
-1, 0 y 1 son puntos frontera.

Conjunto S_4:
0 y 1 son puntos frontera.

Conjunto S_5:
a y b son puntos frontera.

Conjunto S_6:
a y b son puntos frontera.

Conjunto S_7:
Todos sus puntos son puntos frontera.

Conjunto S_8:
Los puntos de abscisa irracionales x_m , tal que $1 < x_m < 5$ no son exteriores y no pertenecen al conjunto. Son puntos frontera.

Los puntos de abscisas racionales comprendidas entre 1 y 5 no son interiores y tampoco son exteriores. Son puntos frontera. Todo punto de D_8 es punto frontera.

Conjunto S_9:
No tiene puntos frontera.

Conjunto frontera

Conjunto S_8:
Su frontera está formado por todos los puntos del conjunto (racionales), mas los puntos de abscisas irracionales que están comprendidas entre 1 y 5.

Conjunto S_9:
No tiene frontera.

Límite

Noción intuitiva de límite

Sea $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

¿Se aproxima *f(x)* a algún número cuando "x" se aproxima a 1?

Para responder haremos dos cosas::

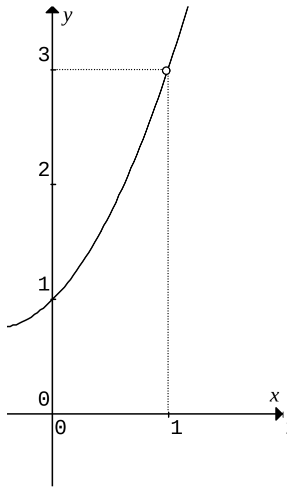
i) Calcular algunos valores para "x" próxima a 1.

ii) Bosquejar la gráfica de $y=f(x)$ en las proximidades de $x=1$

i)

x	y
1,25	3,813
1,10	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1,000	¿?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710
0,75	2,313

ii)



La información reunida parece apuntar a la misma conclusión: (*f(x)* tiende a tres): $f(x)\to 3$ cuando (x tiende a uno): $x\to 1$.

En símbolos :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

Haciendo un poco de algebra:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=(x^2+x+1)\ ,\quad \frac{(x-1)}{(x-1)}=1 \text{ siempre y cuando } x\neq 1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$$

Para estar seguros de que estamos en la pista correcta, necesitamos una clara comprensión del significado de la palabra límite.

Decie que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, significa que si x está en el entorno reducido de a, f está cerca de ℓ.

La noción de límite está asociada al comportamiento de la función en el entorno reducido de "a".

Ej 1: Encuentre $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)$

Si $x\in N^*_\delta(3)\Rightarrow f$ está cerca de 7

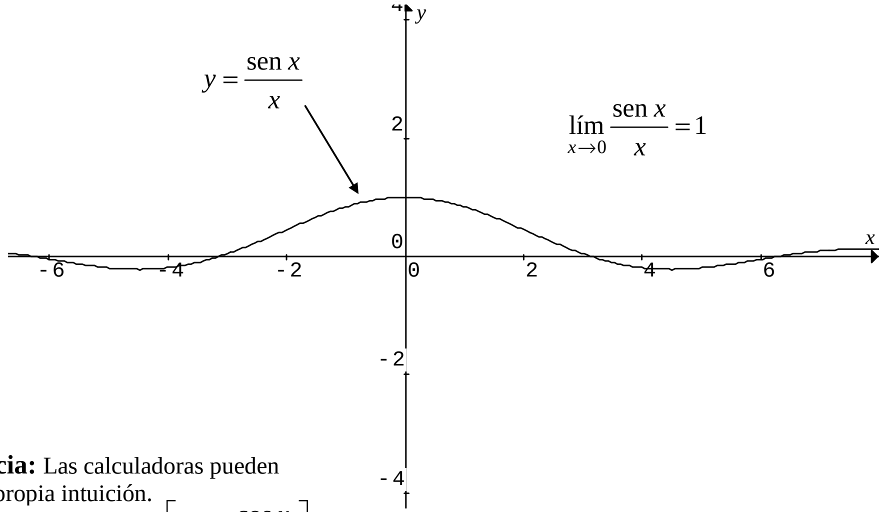
Entonces $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5)=7$

Ej 2: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=3+2=5$

Ej 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+1=2$

Ej 4: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

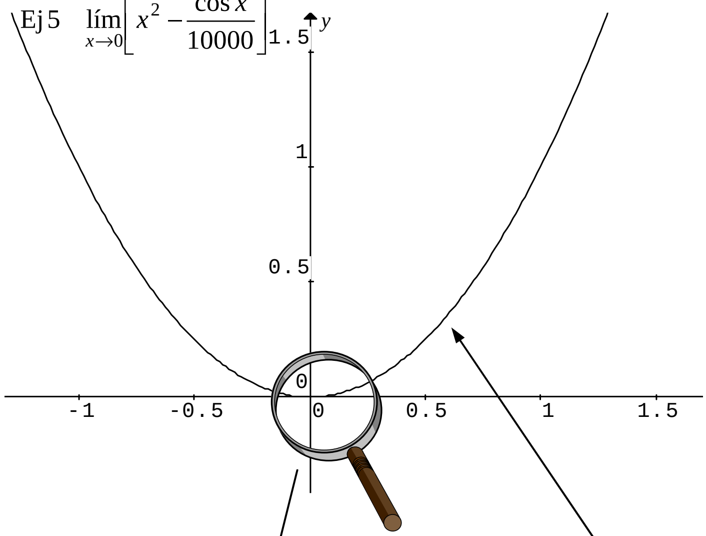
x	y
1	0,84147
0,5	0,95995
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	¿?
↑	↑
-0,01	0,99998
-0,1	0,99833
-0,5	0,95885
-1	0,84147



Algunas señales de advertencia: Las calculadoras pueden desorientarnos, así como nuestra propia intuición.

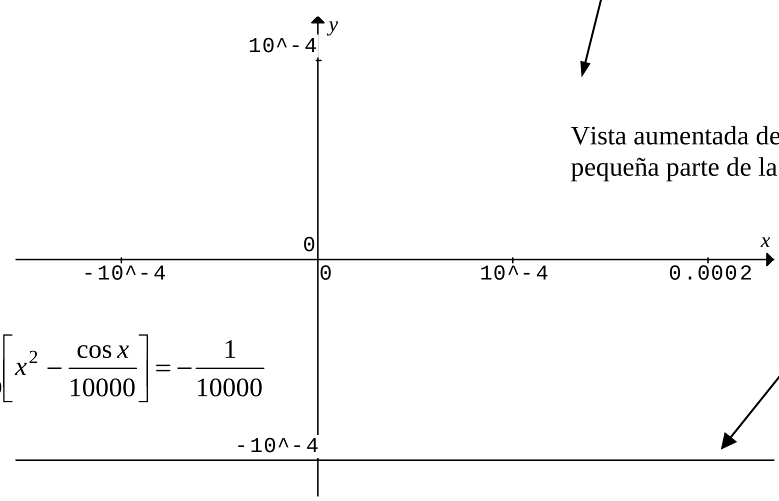
x	y
1	0,99995
0,5	0,24991
0,1	0,00990
0,01	0,000000005
↓	↓
0	¿?
↑	↑
-0,01	0,000000005
-0,1	0,00990
-0,5	0,24991
-1	0,99995

Ej 5 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2-\dfrac{\cos x}{10000}\right]$



$y=x^2-\dfrac{\cos x}{10000}$

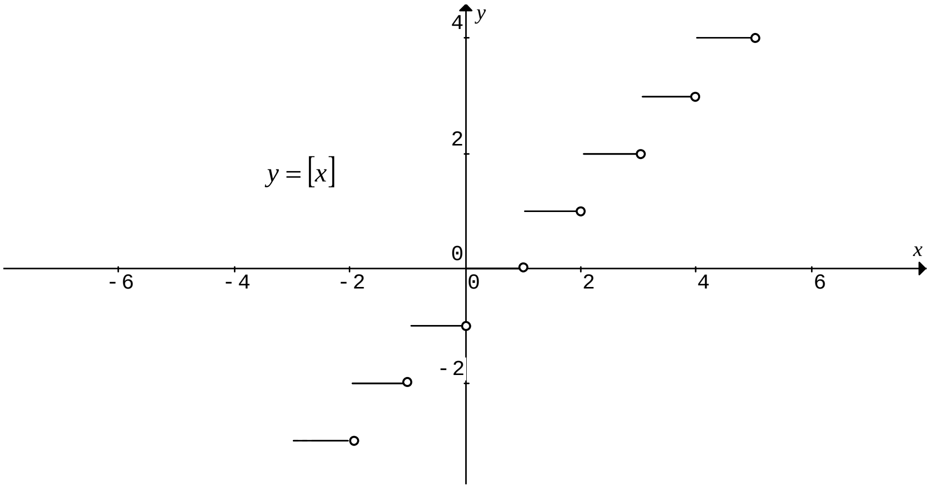
Vista aumentada de una pequeña parte de la curva



$\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2-\dfrac{\cos x}{10000}\right]=-\dfrac{1}{10000}$

Obs: 10 ^ -4 significa 10^{-4}

Ej 6 : $\lim\limits_{x \to 2} [x]$ no existe $\qquad [x]$: parte entera de x



Limite -Definición (ε,δ)

<u>Definición:</u> Sea $f : A \to B$ donde $A \subseteq B$ y a un punto de acumulación de A. Se dice que el número ℓ es el límite de f en el punto a si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe al menos un $\delta > 0$ tal que $\left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$ para todo $x \in D_f$ y al $0 < |x - a| < \delta$.

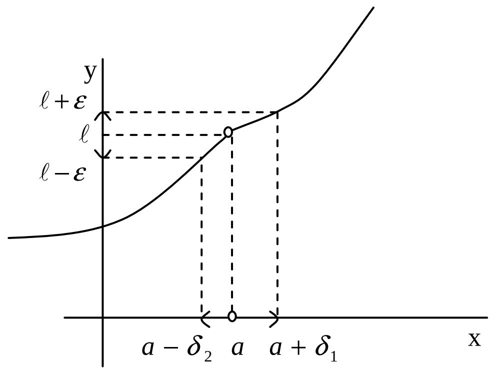
En símbolos:

...en general

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \wedge \delta = \delta(\varepsilon) / \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

Usando notación de entornos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall N_\varepsilon(\ell), \exists N^*_\delta(a) / \forall x \in D_f \wedge x \in N^*_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in N_\varepsilon(\ell)$$



Si quiero para a un entorno simétrico, debo tomar de los dos δ_1 y δ_2 el menor, ya que si tomo el mayor habrá x pertenecientes al entorno reducido de a que aporten valores de la función que queden fuera del $N_\in(l)$

Observamos:

i) El concepto de límite de una función es local, se refiere a un punto a.

ii) El punto a puede pertenecer o no al D_f

iii) La definición de límite no es constructiva, ya que no indica una metodología para determinar el límite, si éste existe

iv) Vale la pena enfatizar que en la definición (ε, δ), primero se da el número ε (Real positivo y arbitrariamente pequeño) y se debe producir el número δ, que en general depende de ε. Además de acuerdo a la definición debemos ser capaces de producir para cada ε, un δ correspondiente. Recuerde: si dado un ε produce dos δ, tome el menor para armar el entorno reducido de a.

Ej:

1) Pruebe que $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

El problema consiste en producir un $\delta > 0$, para cualquier $\varepsilon > 0$.

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Considero la desigualdad de la derecha:

$$\begin{aligned} |(3x-7)-5| < \varepsilon &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x-4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 3|x-4| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

luego $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, también funcionará cualquier $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$

2) Pruebe que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

No lo olvide: debe producir δ, dado ε.

Por definición (ε, δ) :

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

Trabajemos con la desigualdad de la derecha:

$$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x + 1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Observe que $x \neq 2$ porque estamos en el entorno reducido de “2”. Luego la cancelación del factor : $x - 2$ es legítima

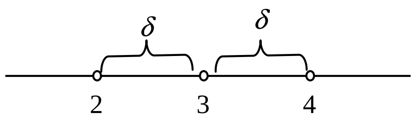
Esto indica que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ funcionará, también cualquier $\delta > 0$ y $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

3) Pruebe que $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x^2 + x - 5 - 7| < \varepsilon$$

Trabajo $|x^2 + x - 12| < \varepsilon$

$|x - 3||x + 4| < \varepsilon$, para encontrar $\delta = \delta(\varepsilon)$, puedo acotar el factor $|x + 4|$; para hacerlo escojamos $\delta \leq 1$



$x = 2 \Rightarrow |x + 4| = 6$

$x = 4 \Rightarrow |x + 4| = 8$

Luego $6 < |x + 4| < 8$

Ahora $|x - 3||x + 4| < |x - 3|.8 < \varepsilon$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{8}$$

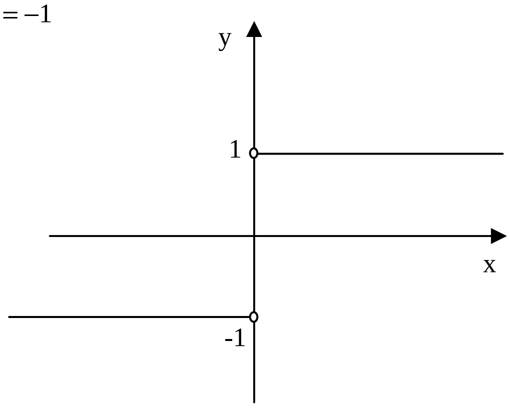
Entonces $\delta \leq min(1, \frac{\varepsilon}{8})$

Límites laterales

Sea $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ cuyo Dominio es $D_f = \boldsymbol{R}-\{0\}$; $x=0$ es un punto de acumulación del D_f

Si $x>0$: $f(x)=1$

Si $x<0$: $f(x)=-1$

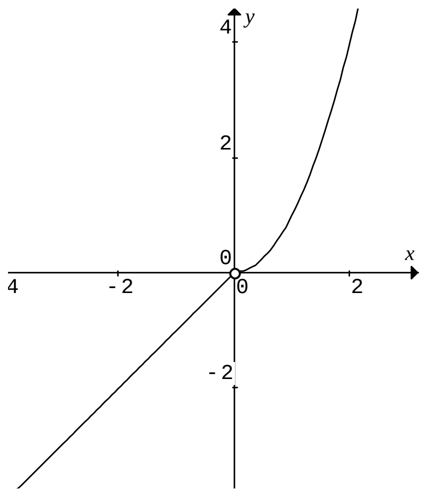


$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$

Ej: $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<0 \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$



<u>Definición</u>: Se dice que ℓ_d es el límite por derecha de la función en el punto a sii a es punto de acumulación del D_f y $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0 \wedge \delta=\delta(\varepsilon)/\forall x\in D_f \wedge a<x<a+\delta \Rightarrow \left|f(x)-\ell_d\right|<\varepsilon$.

ℓ_i es el límite por izquierda de la función *f* en el punto a sii a es punto de acumulación del D_f y $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0 \wedge \delta=\delta(\varepsilon)/\forall x\in D_f \wedge a-\delta<x<a \Rightarrow \left|f(x)-\ell_i\right|<\varepsilon$

Diremos que una función tiene límite en $x=a$ si $\ell_i=\ell_d=\ell$

Si *f* es una función polinomial o una fraccionaria y a pertenece al dominio de *f*, entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

- No todos los límites se pueden calcular mediante sustitución directa.

Ej: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}$ no se puede obtener por sustitución directa, porque no existe *f(1)*.

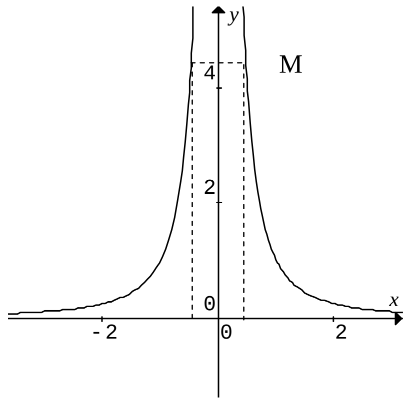
Límite infinito:

Si el límite no existe, puede ocurrir que existan límites laterales finitos pero distintos. También puede significar que la función, en el punto estudiado, sea oscilante. Pero también puede suceder que cuando x se aproxima a a, los valores de la función superan, en valor absoluto, cualquier número real prefijado.

Definición:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *sii* $\forall M > 0$ (arbitrariamente grande) $\exists \delta > 0 \wedge \delta = \delta(M) \,/\, \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

Ej 1: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$



$\dfrac{1}{x^2} > M$; $\forall x: \; 0 < |x - 0| < \delta$

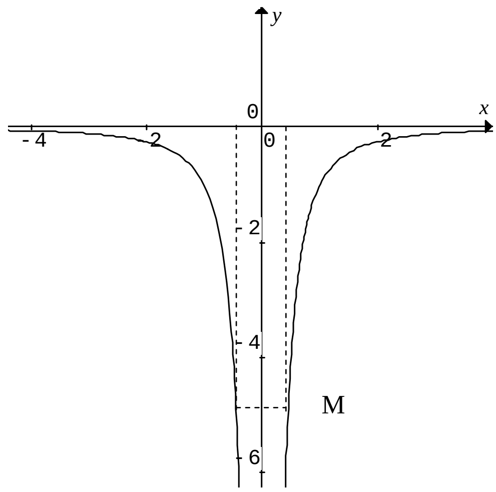
$x^2 < \dfrac{1}{M}$

$|x| < \sqrt{\dfrac{1}{M}}$

$-\dfrac{1}{M} < x < \dfrac{1}{M}$

Ej 3: $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$

$\forall M > 0, \quad \exists \delta = \delta(M) \,/\, \forall x \in N^*(a) \Rightarrow f(x) < -M$



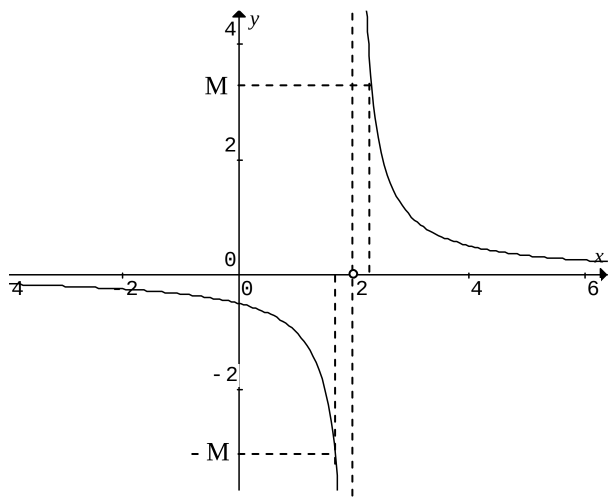
$-\dfrac{1}{x^2} < -M \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > M \Rightarrow x^2 < \dfrac{1}{M}$

$|x| < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{M}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Ej 3: $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, cuyos valores para $x \in N^*_\delta(2)$ superan cualquier número prefijado.

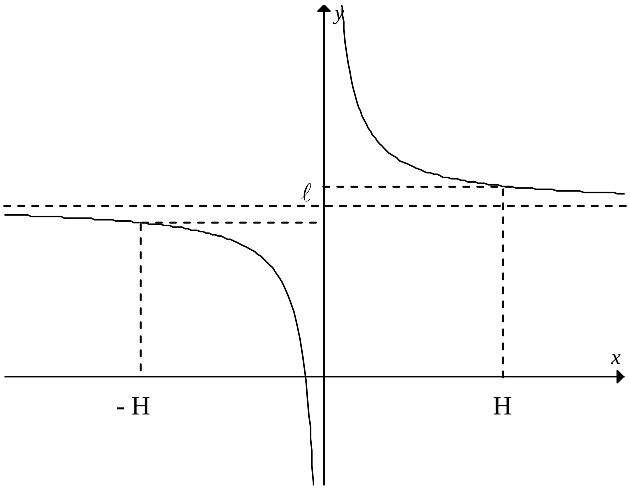
Sea $M = 10^6$, siempre podremos encontrar por lo menos un $N^*_\delta(2)$, de manera que para los $x \in N^*_\delta(2)$, la función en valor absoluto supere a *M*.

$\left|\dfrac{1}{x-2}\right| > 10^6 \Rightarrow |x - 2| < \dfrac{1}{10^6}$ Si $\delta \le \dfrac{1}{10^6} \;\; \forall x \in N^*_\delta(2) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x-2}\right| > M$



Veamos el límite finito cuando $x \to \infty$ y también límite infinito cuando $\ell \to \infty$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \;\; sii \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists H = H(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall |x| > H \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



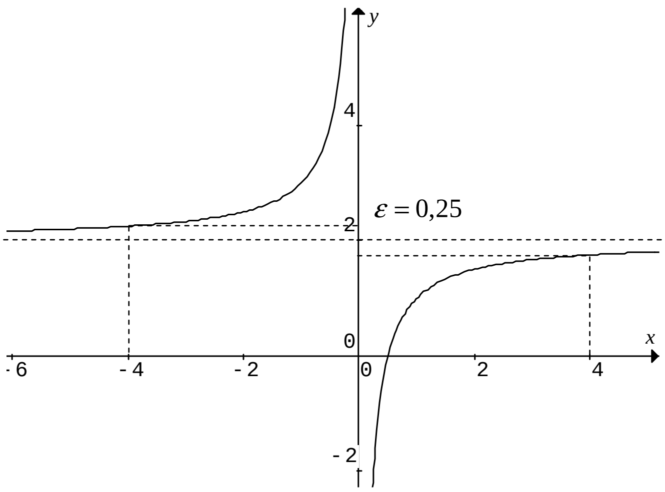
Ej: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$

$\forall x : |x| > H \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{2x-1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{2x-1-2x}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -\dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$H = \dfrac{1}{\varepsilon}$ Ej: $\varepsilon = 0{,}25 \Rightarrow H = 4$

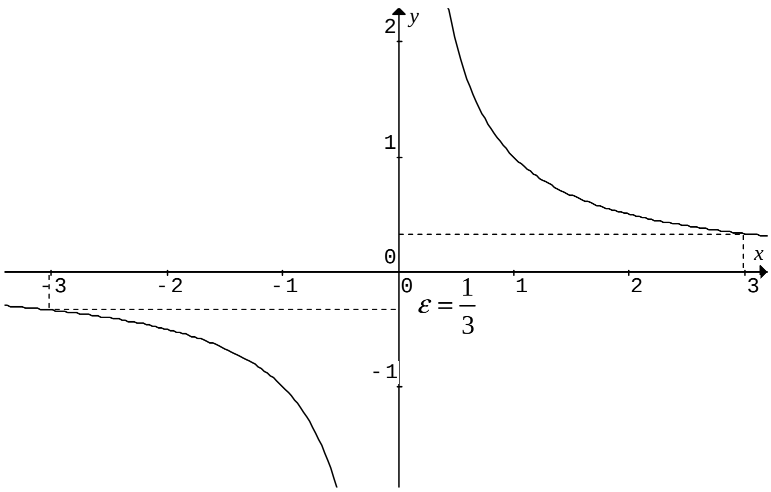


Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

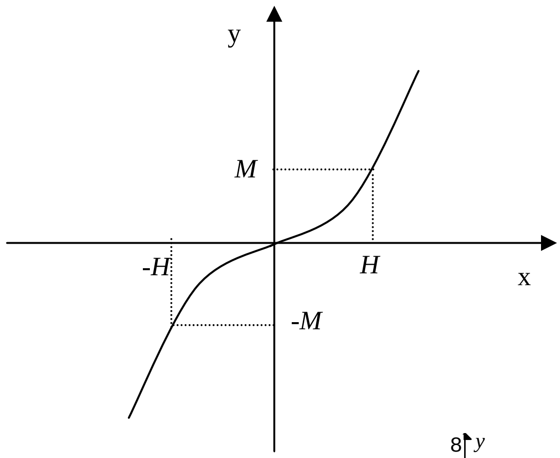
$\forall |x| > H \Rightarrow \left| \dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$

$\forall |x| > H \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ tomo $H \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$

Ej: $\varepsilon = \dfrac{1}{3} \Rightarrow H = 3$



ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \ \ sii \ \ \forall M > 0 \ \ \exists H = H(M) \wedge H > 0 \,/\, \forall |x| > H \Rightarrow |f(x)| > M$



Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$

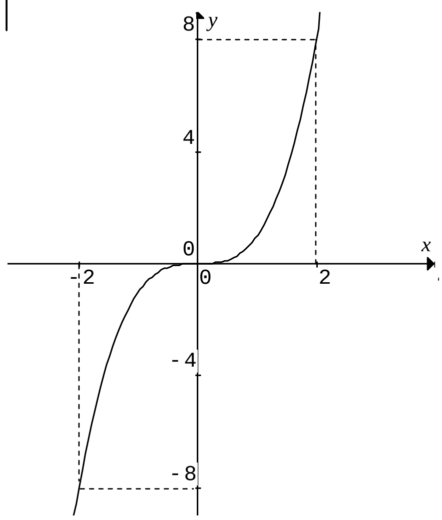
$|x^3| > M$

$|x|^3 > M$

$|x| > \sqrt[3]{M}$

$H = \sqrt[3]{M}$

Ej: M=*8*
$|x| \geq 2$



Teoremas sobre límites y propiedades sobre límites.

1) Teorema: Si una función tiene límite en un punto, este límite es único

Prueba: Lo haremos por el absurdo, o sea suponiendo que f(x) tiene límites distintos en $x = a$

Si $f(x)$ tiene límite, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ (1) y suponiendo además que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_2$ (2)

Entonces de (1): $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_1 > 0 \wedge \delta_1 = f(\varepsilon) / x \in 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$

De (2): $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_2 > 0 \wedge \delta_2 = f(\varepsilon) / x \in 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$

Sumando m.a.m:

Tomo $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon$

por propiedad de módulo:

$|f(x) - \ell_1 + \ell_2 - f(x)| \leq |f(x) - \ell_1| + |\ell_2 - f(x)| < 2\varepsilon$

$|\ell_2 - \ell_1| < 2\varepsilon$

Luego $x \in 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\ell_2 - \ell_1| < 2\varepsilon$

Como esta relación debe ser válida $\forall\varepsilon > 0$, si $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2 - \ell_1|}{2}$

Resulta : $|\ell_2 - \ell_1| < 2\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1|$

$|\ell_2 - \ell_1| < |\ell_2 - \ell_1|$ este absurdo proviene de suponer $\ell_1 \neq \ell_2$

2) Teorema: Si *f(x)* es una función que tiene límite ℓ , cuando $x \to a$, entonces, entonces $\exists N^*_\delta(a) / \forall x \in N^*_\delta(a)$ la función está acotada o sea $|f(x)| < k$

Prueba:

Como existe $\ell \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta / \forall x \in N^*_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Por propiedad de módulo: $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Luego si $x \in N^*_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| - |\ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |\ell|$

$\Rightarrow |f(x)| < k$

3) Sean: $n \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{R}$ *y* $f(x)$ *y* $g(x)$ funciones con límites en "*a*".

1) $\lim_{x\to a} k = k$

$\forall x: \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |k-k| < \varepsilon; \qquad \forall\delta \in \mathbf{R}$

4) $\lim_{x\to a} x = a$

$\forall x: \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \varepsilon; \qquad \delta \leq \varepsilon$

5) $\lim_{x\to a} [k.f(x)] = k.\lim_{x\to a} f(x) = k.\ell$

$\exists \lim_{x\to a} f(x); \qquad \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$

$\forall x: \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |k.f(x) - k.\ell| = |k|.|f(x) - \ell| < |k|.\dfrac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$

Luego: $\lim_{x\to a} k.f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x)$

6) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \ell_1 + \ell_2$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell_1 \quad sii \quad \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell_1|<\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\ell_2 \quad sii \quad \forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-\ell_2|<\varepsilon_2$$

$$\delta=\text{mín}(\delta_1,\delta_2)\Rightarrow \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow$$
$$|f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$$
$$|f(x)+g(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\ell_1+\ell_2$$

7) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=\ell_1.\ell_2$

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell_1|<\varepsilon_1$$
$$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-\ell_2|<\varepsilon_2$$

$$\delta=\text{mín}(\delta_1,\delta_2)\Rightarrow \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow$$

$$|f(x).g(x)|$$

8) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

9) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

10) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

- Si una función es polinomial o racional: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Límite Notable

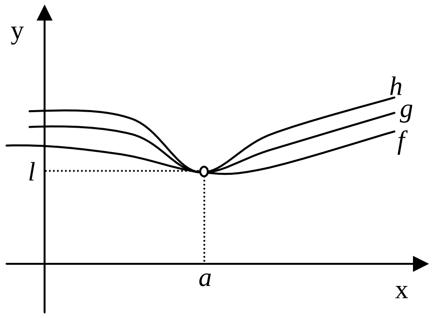
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Ejemplos:

- $\lim_{x\to 3} 2x^4=2.\lim_{x\to 3} x^4=2.\left(\lim_{x\to 3} x\right)^4=2.3^4=162$
- $\lim_{x\to 4}(3x^2-2x)=\lim_{x\to 4} 3x^2-\lim_{x\to 4} 2x=3.\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2-2.\lim_{x\to 4} x=3.4^2-2.4=40$
- $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}=\dfrac{\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to 4} x}=\dfrac{\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2+\lim_{x\to 4} 9}}{\lim_{x\to 4} x}=\dfrac{\sqrt{16+9}}{4}=\dfrac{5}{4}$
- $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2+3t-10}{t^2+t-6}=\lim_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+5)}{(t-2)(t+3)}=\lim_{t\to 2}\dfrac{t+5}{t+3}=\dfrac{7}{5}$

3) Teorema del Sandwich.

Ha oído decir a alguien “me encuentro entre la espada y la pared?” esto es lo que le ocurre a g en el siguiente teorema.



Teorema: Sean f,g,h , tres funciones definidas en un mismo conjunto $S \subset \boldsymbol{R}$ de manera que:
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, y $\forall x: 0<|x-a|<\delta$ y $f(x)\le g(x)\le h(x)$,
entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$

Prueba : Sea $\varepsilon>0$, tómese δ_1

$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$

y $\delta_2 /\ 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow \ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$

tómese $\delta_3 \ /\ 0<|x-a|<\delta_3 \Rightarrow f(x)\le g(x)\le h(x)$

Sea $\delta=\text{mín}(\delta_1,\delta_2,\delta_3) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x)\le g(x)\le h(x)<\ell+\varepsilon$

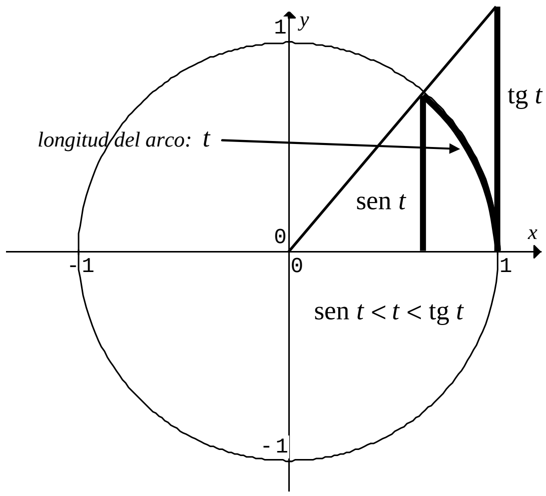
$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-\ell|<\varepsilon$

Luego $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}=1$. Usaremos la propiedad recién probada, para comprobar este límite.

Consideremos un arco x / $0<x<\frac{\pi}{2}$

Podemos establecer la siguiente relación



$\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x,\ \textit{como}\ \text{sen}\,x \ne 0$

$1<\dfrac{x}{\text{sen}\,x}<\dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \dfrac{\text{sen}\,x}{x}<1$

Llamemos *f(x)=cos x; h(x)=1 ;* $g(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim\limits_{x\to 0}1=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}=1$,

Este tipo de límite se llama *“notable”*. También se puede deducir:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{sen}\,x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}\,x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{tg}\,x}=1$

Asíntotas

Se dice que una rama infinita (Hay ramas infinitas cuando una o las dos coordenadas tienden a infinito) de una curva tiene como asíntotas a una recta *r* , si la distancia de un punto M de la curva a la recta tiende a cero cuando M se aleja indefinidamente.

1) Asíntotas verticales: La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f si se cumple alguno de las cuatro condiciones siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ d) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

2) <u>Asíntotas horizontales:</u> La recta $y = \ell$ es asíntota horizontal de la gráfica de una función *f* si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

3) <u>Asíntotas oblicuas</u>: Diremos que la recta $y = mx + b$ con $m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de *f(x)* si $\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - (mx+b)\right] = 0$.

Llamando "*d*" a la diferencia entre las ordenadas de la función y la recta, resulta:

$$d(x) = f(x) - (mx+b) \Rightarrow mx = f(x) - d(x) - b$$

$$\Rightarrow m = \frac{f(x) - d(x) - b}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{d(x)+b}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \begin{cases} m = 0 \Rightarrow asíntota \quad horizontal \\ m = \infty \Rightarrow asíntota \quad vertical \end{cases}$$

Como $\lim_{x\to\infty} d(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx - b\right] = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx)\right] = b$$

Ej: encuentre las asíntotas verticales y horizontales de $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1} = -\infty$$

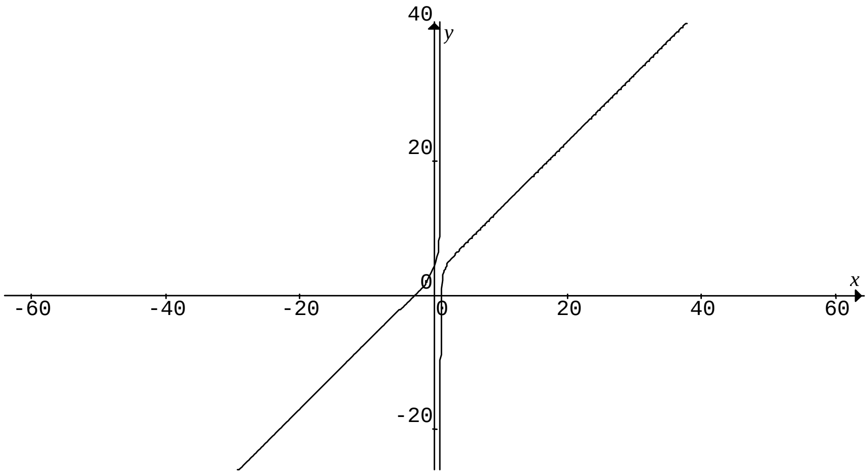
asíntota vertical: x=1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1} = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{asíntota horizontal}$$

Ej: encuentre asíntota oblicua de

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

(como orientación, se muestra su gráfica)



Otra forma de encontrar asíntotas oblicuas

La ecuación de la curva puede escribirse

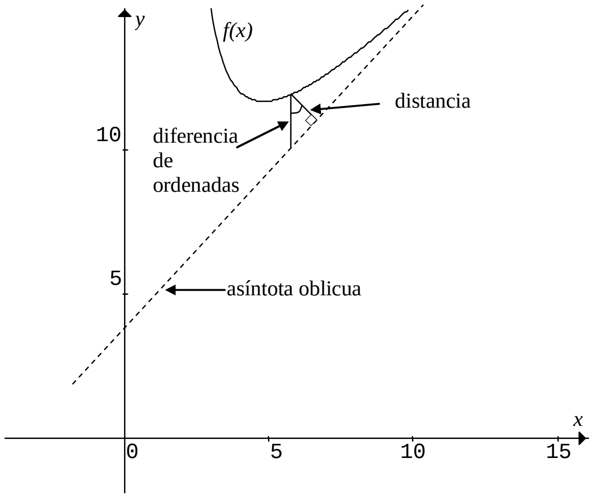
$$y = mx + b + \varepsilon(x)$$

Si al alejarse infinitamente un punto sobre la recta una rama de la curva *x* e *y* crecen indefinidamente, para que *y = mx + b* sea una asíntota basta con que tienda a cero la diferencia de ordenadas de lecta y curva para la misma abscisa. Pues esta diferencia a menos de un factor ..., es la distancia entre curva y recta

Siendo $\varepsilon(x)$ un infinitésimo para $x \to \infty, +\infty \text{ ó } -\infty$

de aquí resulta : $\dfrac{y}{x} = m + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x}$

tomando límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = m$



Para que haya asíntota oblicua el grado del numerador debe ser el del denominador + 1. Luego si se separa del cociente la parte entera, se obtiene la ecuación de la asíntota:

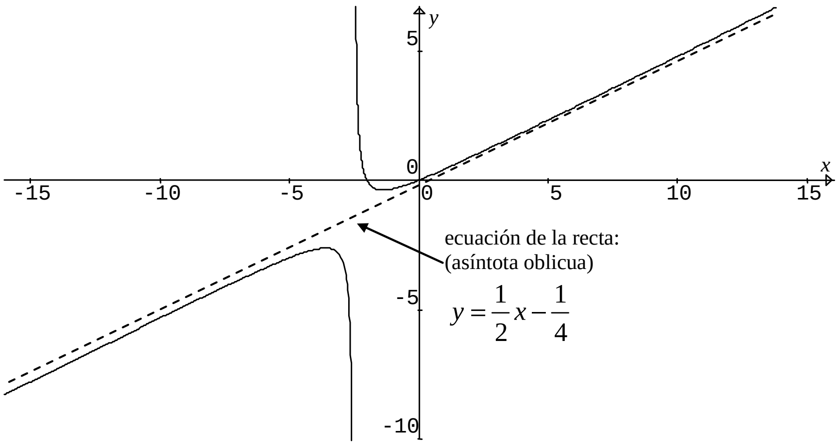
Ej: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{2x+5}$

$$
\begin{array}{rl|l}
\cancel{x^2} + 2x & & 2x+5 \\ \cline{3-3}
-\cancel{x^2} - \frac{5}{2}x & & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \cline{1-1}
-\cancel{\frac{1}{2}}x & & \\
+\cancel{\frac{1}{2}}x + \frac{5}{4} & & \\ \cline{1-1}
\frac{5}{4} & &
\end{array}
$$

Luego: $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{\frac{5}{4}}{2x+5}$

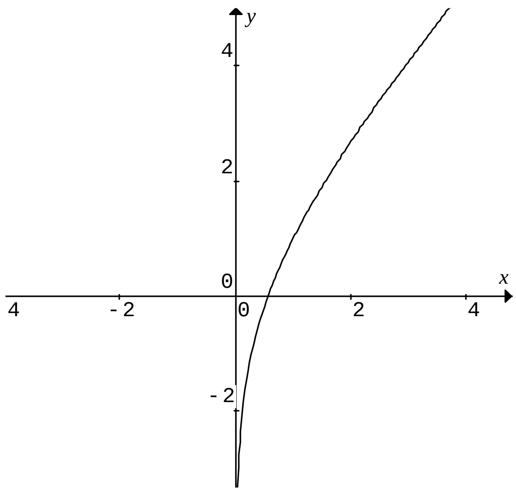
cuando $x \to \infty$ en $\dfrac{\frac{5}{4}}{2x+5} \to 0$,

entonces $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ es la ecuación de la asíntota



Ejemplo: $y = x + \ln x$,

La asíntota oblicua tiene pendiente igual a 1 y la ordenada al origen infinito, es decir la ecuación de la recta sería : $y = x + \infty$, pero esta no corresponde a una ecuación de la recta puesto que no se sabe el valor de “b”, por lo tanto no existe asíntota oblicua.



Infinitésimos

Definición: una función cuyo límite es cero cuando $x \to a$, se dice que es un infinitésimo en el punto $x = a$, es decir: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ se dice que *f(x)* es infinitésimo para $x \to \infty$

Ejemplo:

sen x es infinitésimo para $x = 0, \pi, 2\pi, ...$

$f(x) = x^3$ es infinitésimo para $x = 0$

$f(x) = 2x - 1$ es infinitésimo para $x = 1/2$

$f(x) = x^2 - 4$ es infinitésimo para $x = 2 \vee x = -2$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ es infinitésimo para $x \to \infty$

La condición esencial del infinitésimo es la variabilidad y tener lím para $x \to a$

Importante consignar el valor particular de x para el cual *f(x)* es infinitésimo.

Sea $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0$; la función definida como sigue: $\varphi(x) = f(x) - \ell$ es infinitésimo en $x = a$, pues:

$\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \ell = 0$

También escribiendo:

$f(x) = \varphi(x) + \ell$ en las proximidades de $x = a$, *f(x)* es igual a su límite más un infinitésimo.

Ejemplo:

$f(x) = x^2 + \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$

$\Rightarrow \varphi(x) = f(x) - l = x^2 + \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 8$ es infinitésimo en $x = 2$

No necesariamente debe ser $\varphi(a) = 0$, sólo se pide $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

Propiedades de los infinitésimos

La suma de dos infinitésimo es un infinitésimo:

1) Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ infinitésimo para $x = a$, entonces $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ es infinitésimo en $x = a$.

Demostración:

Como $\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(x)$ son infinitésimos en $x = a$, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} \varphi_1(x) = 0$; luego si $x \in N^*_\delta(a) \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon_1$

$\lim\limits_{x \to a} \varphi_2(x) = 0$; si $x \in N^*_{\delta_2}(a) \Rightarrow |\varphi_2(x)| < \varepsilon_2$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{c} -\varepsilon_1 < \varphi_1(x) < \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 < \varphi_2(x) < \varepsilon_2 \\ \hline -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < \varphi_1(x) + \varphi_2(x) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon < \varphi(x) < \varepsilon \end{array}$$

Luego $x \in N^*_\delta(a) \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon$ 1

$\delta = min(\delta_1, \delta_2)$

1 es la definición de límite: $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.
Si la suma es infinita no se puede asegurar nada.

2) Sea $\varphi(x)$ un infinitésimo en $x = a$ y k una constante, o sea $k \in \boldsymbol{R}$, entonces:
$\varphi_1(x) = k\varphi(x)$ es también un infinitésimo en $x = a$

D) Si $\varphi(x)$ es un infinitésimo en $x = a$, se cumple: $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ y

$x \in N_\delta^*(a) \Rightarrow |\varphi(x) - l| < \varepsilon_1 \quad (l = 0)$

$-\varepsilon_1 < \varphi(x) < \varepsilon_1$

Si $k \neq 0$ $k.(-\varepsilon_1) < k\varphi(x) < k\varepsilon_1$

$|k\varphi(x)| < k\varepsilon_1$

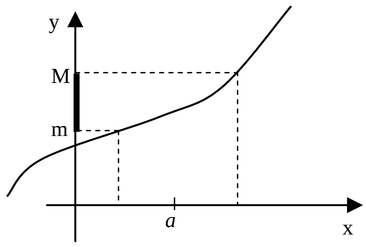
$|\varphi_1(x)| < \varepsilon$

Por tanto si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi_1(x)| < \varepsilon$

Luego $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = 0$

3) El producto de un infinitésimo por una función acotada, en un entorno de x=*a* es un infinitésimo.

$x \in N_\delta(a) \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$



Demostraremos que si $\varphi_1(x)$ es infinitésimo para x=*a*, entonces:
$\varphi(x) = \varphi_1(x).f(x)$ también es infinitésimo para x=*a*.

En efecto:

$m\varphi_1(x) \leq f(x).\varphi_1(x) \leq M\varphi_1(x)$

$m\varphi_1(x) \leq \varphi(x) \leq M\varphi_1(x)$

Como $\lim\limits_{x\to a} m\varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to a} M\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

Ej:

$$\varphi(x) = \overbrace{\frac{1}{2}x}^{\text{infinitésimo}}.\underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{función acotada}}$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, luego $\varphi(x)$ es un infinitésimo para x=0.

Comparación de Infinitésimos

Sean *f(x)* y *F(x)* dos infinitésimos en x=*a*.

1) Se dice que *f(x)* y *F(x)* son del mismo orden si: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = k \neq 0$

Ej: $\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 5x + 6 \\ F(x) = x^2 - 6x + 18 \end{array}$

f(x) y *F(x)* son infinitésimos en x=2

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4} \text{ si } x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Luego *f(x)* y *F(x)* son infinitésimos del mismo orden en x=2.

En particular si $k=1$, se dice que los infinitésimos son equivalentes.: Ej: $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $F(x)=x$ en $x=0$

2) Se dice que *f(x)* es de orden superior a *F(x)* si: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=0$

Ej: $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$; $F(x)=x+2x^2$ son infinitésimos para x=0.

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+2x^2}=\frac{\operatorname{sen} x.\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1+2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{0.1}{0}=0$$

Infinitésimo tipo

Consideremos el conjunto de funciones: $f_1(x),\ f_2(x),....,\ f_n(x)$, que son infinitésimos en x=*a*.
Una de tales funciones es *F(x)=x-a* , pues $\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$. Denominaremos a *F(x)=x-a* infinitésimo tipo o infinitésimo tipo de comparación para el conjunto de las funciones que son infinitésimos en *x=a*.

Orden de un infinitésimo

1) Sea *f(x)* un infinitésimo en *x=a* y *F(x)=x-a*, si:

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=k\neq 0\Rightarrow f(x)$ es un infinitésimo de 1er orden en *x=a*

Ej: $f(x)=x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$; $F(x)=x-2$

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-2)}=(x-1)^2 \quad \text{si} \quad x\neq 2$$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^2=1\Rightarrow f(x)$ es infinitésimo de 1er orden en *x*=2.

2)Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=0\Rightarrow f(x)$ es de orden superior a 1

Ej: $f(x)=x^3-4x^2+5x-2=\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)$ en $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)(x-2)\right]=0,\text{ luego}$$

$f(x)$ es infinitésimo de orden superior a uno en $x=1$

3)Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(x-a\right)^2}=k\neq 0\Rightarrow f(x)$ es de 2do orden

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^2}=-1\neq 0$$

Luego *f(x)* es infinitésimo de 2do orden en $x=1$

4)Generalizando: si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}}=0\Rightarrow f(x)$ es infinitésimo de orden superior a $(n-1)$ en $x=a$

Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^{n-1}} \neq 0 \Rightarrow f(x)$ es de orden n

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x) = 1-\cos x \\ F(x) = x-a = x \end{array}\right\}$ infinitésimo en $x=0$

$$f(x) = 1-\cos x = 1-\left[\cos^2 \tfrac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x\right] = 1-\cos^2 \tfrac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x = 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x.\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\frac{x}{2}} = 0$$

Luego $f(x)$ es infinitésimo de orden superior en $x=0$

Ej:

$f(x) = 1-\cos x$

$F(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\frac{x}{2}} . \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

Luego *f(x)* es infinitésimo de 2do orden en $x=0$

Orden de la suma de dos infinitésimos

Sea $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos infinitésimos en $x=a$ de órdenes m y n respectivamente y además $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ con $m<n$.

Encontrar el orden de *F(x)*.

F(x) es un infinitésimo en $x=a$; demostraremos que el orden de *F(x)* es el menor entre los órdenes de $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

D) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^m} = k_1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^m} = k_1 + \varphi_1(x)$

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^n} = k_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^n} = k_2 + \varphi_2(x)$

$$f_1(x) = (x-a)^m \left[k_1 + \varphi_1(x)\right]$$
$$f_2(x) = (x-a)^n \left[k_2 + \varphi_2(x)\right]$$

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x-a)^m \left[k_1 + \varphi_1(x)\right] + (x-a)^n \left[k_2 + \varphi_2(x)\right]$$

$$\text{Si} \quad m<n \Rightarrow F(x) = (x-a)^m \left[k_1 + \varphi_1(x) + (x-a)^{n-m}\left(k_2 + \varphi_2(x)\right)\right]$$

Buscamos demostrar que el orden de *F(x)* es el menor entre $f_1(x)$ y $f_2(x)$ por lo tanto comparamos a *F(x)* con $(x-a)^m$.

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{(x-a)^m} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^m \left[k_1 + \varphi_1(x) + (x-a)^{n-m}(k_2 + \varphi_2(x)\right]}{(x-a)^m}$$

$$= \lim_{x\to a} k_1 + \lim_{x\to a} (x-a)^{m-n}(k_2 + \varphi_2(x)) = k_1 + 0 + 0 = k_1$$

Luego el orden de *F(x)* es m , el menor entre m y n

Ej: $f_1(x) = 1-\cos x \qquad f_2(x) = x^3$

$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$f_1(x)$ es infinitésimo de orden 2 en $x=0$ y $f_2(x)$ es infinitésimo de orden 3 en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{1-\cos x}{x^2}\right]=0+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

Luego *F(x)* es de orden 2.

Observación: el orden de una suma de r infinitésimos es el del sumando que lo tenga menor, siempre que éste sea único. Este sumando se llama término o parte principal.
Si hay varios sumandos del mismo orden mínimo nada podrá asegurarle del orden de la suma.
En este último caso la parte principal es la suma de los términos del mismo orden mínimo.

Ej:

$f(x)=3x^4+2\,\mathrm{sen}^3\,x$ en $x=0$

$f_1(x)=3x^4$ es infinitésimo de 4to orden en $x=0$

La parte principal de $f(x)$ es $f_2(x)=2\,\mathrm{sen}^3\,x$

Orden del producto de dos infinitésimos

Dados $f_1(x)$ y $f_2(x)$ infinitésimos en $x=a$ de órdenes m y n respectivamente y $F(x)=f_1(x).f_2(x)$

Demostraremos: $\left|\begin{array}{l} a)\ F(x) \text{ es infinitésimo en } x=a \\ b) \text{ el orden de } F(x) \text{ en } x=a \text{ es } (m+n)\end{array}\right.$

D)

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{(x-a)^m}=k_1\neq 0\Rightarrow\frac{f_1(x)}{(x-a)^n}=k_1+\varphi_1(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{(x-a)^m}=k_2\neq 0\Rightarrow\frac{f_2(x)}{(x-a)^n}=k_2+\varphi_2(x)$$

Luego:

$$f_1(x)=(x-a)^m\left[k_1+\varphi_1(x)\right]$$
$$f_2(x)=(x-a)^m\left[k_2+\varphi_2(x)\right]$$

$$F(x)=f_1(x).f_2(x)=(x-a)^{m+n}\left[k_1+\varphi_1(x)\right]\left[k_2+\varphi_2(x)\right]$$

comparando con $(x-a)^{m+n}$

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{(x-a)^{m+n}}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{m+n}\left[k_1+\varphi_1(x)\right]\left[k_2+\varphi_2(x)\right]}{(x-a)^{m+n}}$$

$$=\lim_{x\to a}(k_1.k_2)\neq 0$$

Luego $F(x)$ es un infinitésimo de orden $(m+n)$ en $x=a$

Ej: $\begin{array}{l}\mathrm{sen}^2\,x \text{ es infinitésimo de orden 2 en } x=0\\ 3x-5x^3 \text{ es infinitésimo de orden 1 en } x=0\end{array}$

$$F(x)=\mathrm{sen}^2\,x.(3x-5x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2\,x(3x-5x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2\,x}{x^2}.\frac{(3x-5x^3)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}.\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}.\frac{x(3-5x^2)}{x}=1.1.3=3\neq 0$$

Luego *F(x)* es infinitésimo de orden 3 en $x=0$

Orden del cociente de dos infinitésimos

Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos infinitésimos de orden *m* y *n* respectivamente en $x = a$ y $F(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, si $F(x)$ es infinitésimo en $x = a$, entonces el orden de $F(x)$ en $x = a$ es $m - n$ suponiendo que $m > n$

D) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^m} = k_1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_1(x)}{(x-a)^m} = k_1 + \varphi_1(x)$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^n} = k_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_2(x)}{(x-a)^n} = k_2 + \varphi_2(x)$

Luego :

$$f_1(x) = (x-a)^m \left[k_1 + \varphi_1(x)\right]$$
$$f_2(x) = (x-a)^n \left[k_2 + \varphi_2(x)\right]$$

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = (x-a)^{m-n} \frac{\left[k_1 + \varphi_1(x)\right]}{\left[k_2 + \varphi_2(x)\right]}$$

Comparo $F(x)$ con $(x-a)^{m-n}$:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\left[k_1 + \varphi_1(x)\right]}{\left[k_2 + \varphi_2(x)\right]} = \dfrac{k_1}{k_2} \neq 0$, luego *F(x)* es de orden *m – n*.

Si $m < n$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{F(x)}{(x-a)^{m-n}} = \lim\limits_{x \to a} F(x).(x-a)^{n-m} = 0$

En este caso el orden del cociente no es $m - n$

Si $m = n$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{F(x)}{(x-a)^{m-n}} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{F(x)}{(x-a)^0} = \lim\limits_{x \to a} F(x)$

Conclusión: el orden del cociente es $m - n$ si el orden del numerador es mayor que el orden del denominador.

Funciones Continuas

1) **Continuidad en un punto:** Se dice que $f(x)$ es continua en $x = a$ sii se cumplen las siguientes condiciones :

i.) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

ii.) Existe $f(a)$

iii.) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La misma definición puede darse usando entornos:

$f(x)$ es continua en $x = a$ sii $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Ej: Pruebe que la función $f(x) = mx + b$ es continua en $x = a$

i.) $\lim\limits_{x \to a} mx + b = ma + b$

ii.) $f(a) = ma + b$

iii.) $\lim\limits_{x \to a} (mx + b) = f(a)$

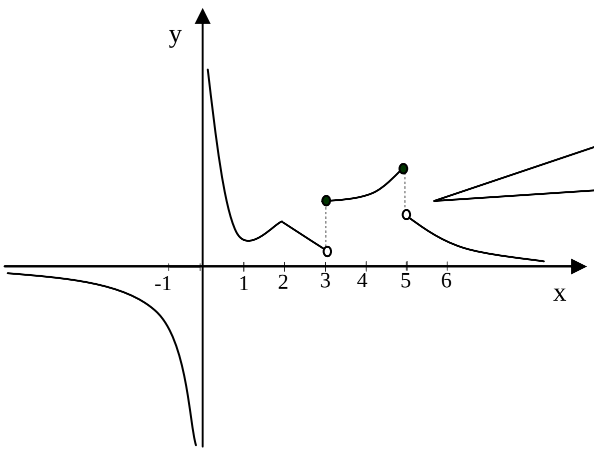
2) **Continuidad en un intervalo abierto** (a, b) **:** Se dice que una función es continua en el intervalo abierto (a, b) , si es continua en todo punto perteneciente al intervalo (a, b) .

3) **Continuidad en un intervalo cerrado** $[a, b]$ **:** Se dice que una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en el intervalo (a, b) y además es continua a la derecha de a y a la izquierda de b.

f es continua a la derecha de a si se verifica que: $\lim\limits_{x \to a^+} = f(a)$

f es continua a la izquierda de b si se verifica que: $\lim\limits_{x \to b^-} = f(b)$

Ej: para la siguiente función determine los puntos de discontinuidad y establezca los intervalos en los cuales la función es continua.



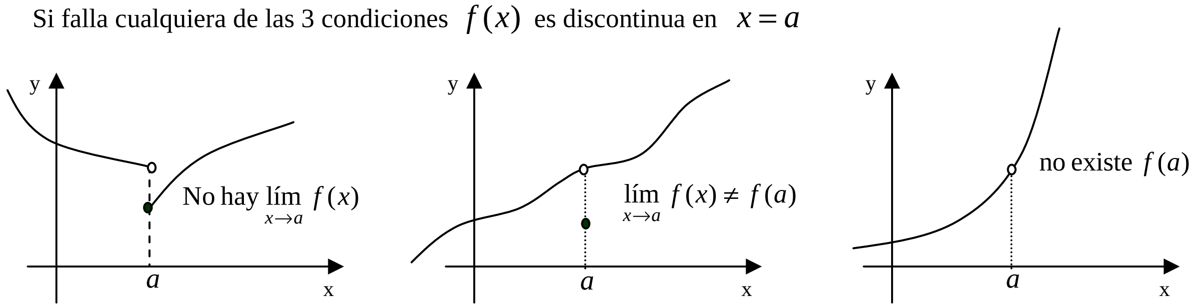
Rta:

i) Puntos de discontinuidad:
$x = 0;\ x = 3;\ x = 5$

ii) La función es continua en:
$(-\infty, 0),\ (0,3),\ [3,5],\ (5, \infty)$

Discontinuidad

Si falla cualquiera de las 3 condiciones $f(x)$ es discontinua en $x = a$



Podemos clasificar la discontinuidad en un punto, de la siguiente manera:

$$\text{Discontinuidad en un punto} \begin{cases} \text{evitable} \\ \text{esencial} \begin{cases} \text{1ra. especie} \\ \text{2da. especie} \end{cases} \end{cases}$$

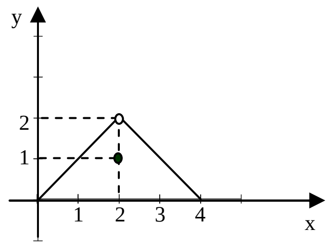
Clases de Discontinuidad

Discontinuidad evitable

<u>i)</u> $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ (finito y determinado)

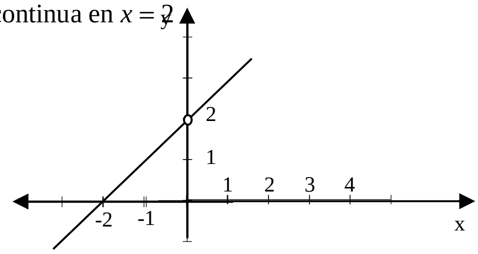
<u>ii)</u> $f(a)$ puede o no existir, si $\exists f(a)$ entonces $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Ej (1): $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$



i) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$; $f(2) = 1 \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x = 2$

Ej (2): $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$



i) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$; no existe $f(0)$

En estos casos de discontinuidad evitable, parece natural completar la función haciendo: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, en el caso de que $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$.

Para los ejemplos vistos, la función se hace continua de la siguiente manera:

Ej(1): $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) & \text{si } x = 2 \\ -x+4 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$ Ej(2): $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x \ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Este valor con el que "redifiremos" la función en $x = a$, suele llamarse verdadero valor de la función en $x = a$.

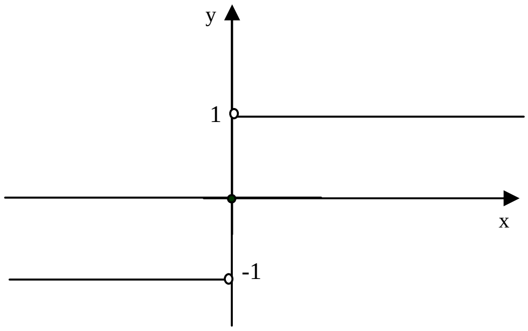
Discontinuidad esencial:

en este caso no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o no es finito

i) Discontinuidad esencial de 1ra. especie : $\exists l_i$, $\exists l_d \wedge l_i \ne l_d$, l_i y l_d son límites finitos

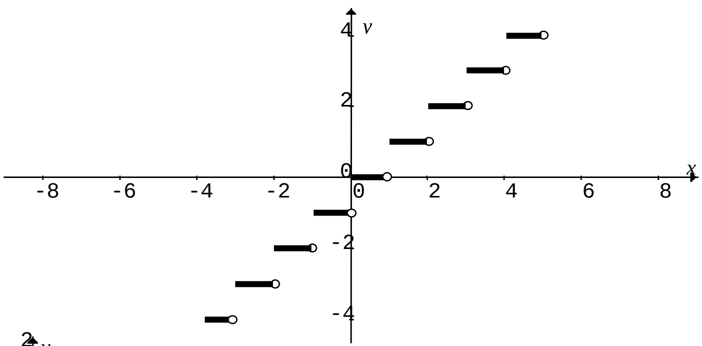
ii) Discontinuidad esencial de 2da. Especie; uno o los dos límites laterales son infinitos o no existen.

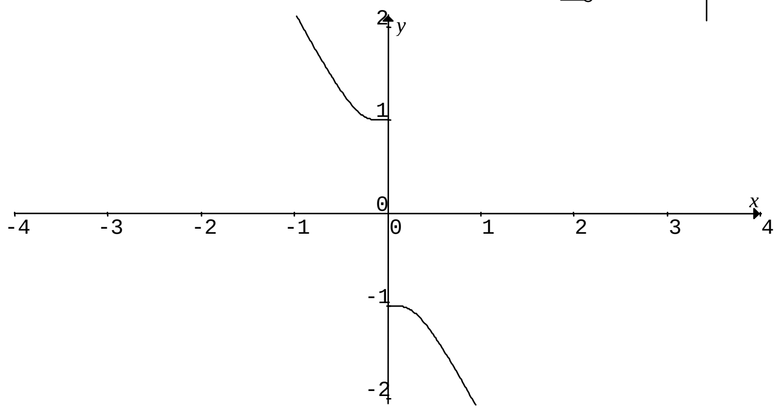
Ej: $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



La función del ejemplo (signo de x) tiene en $x = 0$ una discontinuidad esencial de 1ra. especie.
Cuando la discontinuidad es de primera especie, se puede calcular el salto= $l_d - l_i$
En el ejemplo: salto $= 1 - (-1) = 2$

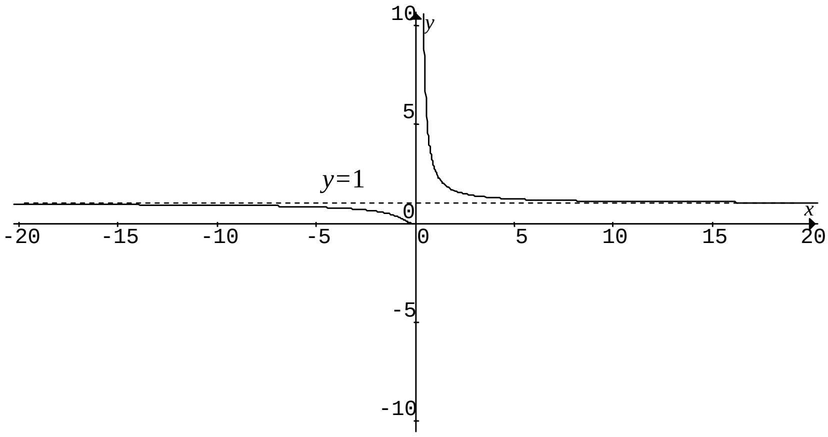
Ejemplos: $f(x) = [x]$; todos los puntos de abscisa entera son puntos de discontinuidad esencial de 1ra. especie; salto=1.

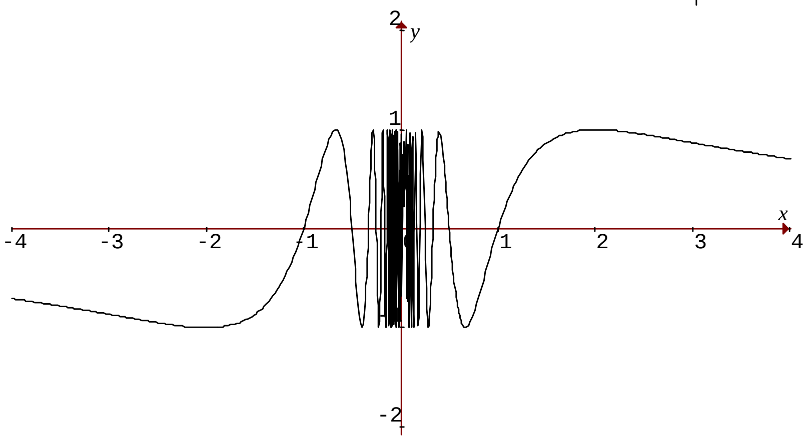




$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$; en $x = 0$ es discontinua esencial de 1ra. especie; salto=-2

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; en $x = 0$ tiene una discontinuidad esencial de 2da. Especie.

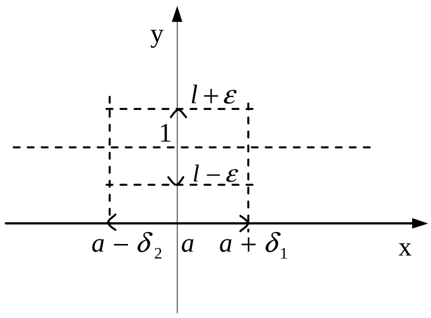




$f(x) = \text{sen}\,\frac{\pi}{x}$, tiene en $x = 0$ una discontinuidad esencial de 2º especie.

Función que es discontinua en todo punto de su dominio

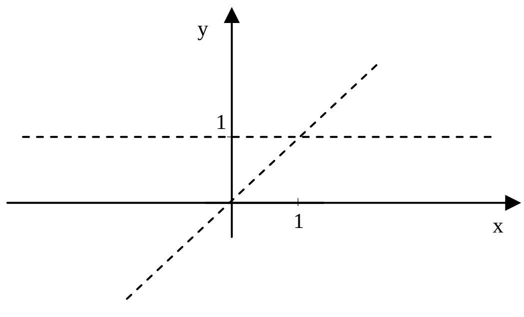
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$



Supongamos que $\lim\limits_{x \to 0} = 1$, si formamos el rectángulo $1 + \varepsilon,\ 1 - \varepsilon,\ a + \delta,\ a - \delta$, vemos que si $x \in 0 < |x - a| < \delta \wedge x \in \mathbf{I}$, la función está fuera del entorno de l, por lo tanto 1, no es el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Función que es discontinua en todos sus puntos, excepto en uno de ellos.

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbf{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbf{I} \end{cases} \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$$



Algebra de las funciones continuas

i) Sea $f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas $x=a$ y $F(x)=f_1(x)+f_2(x); F(x)$ también es continua en $x=a$

Prueba:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=f_1(a)\\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x)=f_2(a)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)=f_1(a)+f_2(a)$$

$$\lim_{x\to a} F(x)=f_1(a)+f_2(a)=F(a)$$

Como

$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$F(a)=f_1(a)+f_2(a)$

Luego $F(x)$ es continua en $x=a$

ii) Sean

$f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas $x=a$ y $F(x)=f_1(x).f_2(x); F(x)$ también es continua en $x=a$

Prueba:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=f_1(a)\\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x)=f_2(a)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} f_1(x).\lim_{x\to a} f_2(x)=f_1(a).f_2(a)$$

$$\lim_{x\to a} F(x)=f_1(a).f_2(a)=F(a)$$

Luego $F(x)$ es continua en $x=a$

iii) Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas $x=a$ y $F(x)=f_1(x)/f_2(x)$ también es continua en $x=a$

Prueba:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=f_1(a)\\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x)=f_2(a)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} f_1(x)/\lim_{x\to a} f_2(x)=f_1(a)/f_2(a)$$

$$\lim_{x\to a} F(x)=f_1(a)/f_2(a),\quad \text{pero } F(x)=f_1(x)/f_2(x)\Rightarrow F(a)=f_1(a)/f_2(a)$$

Luego $\lim\limits_{x\to a} F(x)=F(a)$

Propiedades de las funciones continuas en un punto

1. Si f es continua en $x=a$, existe por lo menos un entorno de *a*, donde la función está acotada .

$f(x)$ continua en $x=a\Rightarrow \exists N_\delta(a)/\forall x\in N_\delta(a): f(x)$ está acotada .

Prueba: Como $f(x)$ es continua en *x=a* : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Luego

$\forall x\in N_\delta(a)\Rightarrow \left|f(x)\right|-\left|f(a)\right|<\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon$

" $\Rightarrow \left|f(x)\right|<\varepsilon+\left|f(a)\right|$

" $\Rightarrow \left|f(x)\right|<k$

Conservación de signo

2. *f(x)* continua en *x=a* y $f(a)\neq 0\Rightarrow \exists\delta=\delta(\varepsilon))/\forall x\in N_\delta(a):$

$$\begin{cases} i)\ \ f(x)<0 \text{ si } f(a)<0\\ ii)\ f(x)>0 \text{ si } f(a)>0\end{cases}$$

Prueba:

i) $f(a)>0$

Por continuidad de $f(x)$ en $x=a$:

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0;\ \forall X \in N^*_\delta(a) \quad / \quad \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$ (propiedad de módulo)

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Siempre que $x \in D_f \wedge x \in N_\delta(a)$

Si $\in = \frac{1}{2} f(a) > 0 \Rightarrow$

$f(a) - \frac{1}{2} f(a) < f(x) < f(a) + \frac{1}{2} f(a)$

$\underbrace{\frac{1}{2} f(a)}_{>0} < f(a) < \underbrace{\frac{3}{2} f(a)}_{>0}$

Como $f(x)$ es continua, tiene el mismo signo de $f(a)$ en $N_\delta(a)$.

Para ii) elegimos $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(a)$

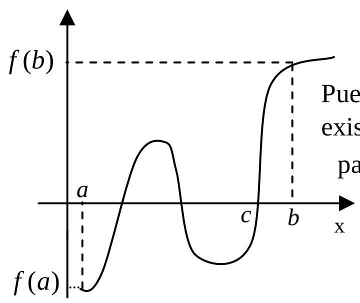
Propiedades de la funciones continuas en un intervalo

3. Teorema de Bolzano. Existencia de ceros.

Sea $f(x)$ continua en $[a,b] / f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = 0$

Prueba:

Como *f(a)* y *f(b)* tienen distintos signos, supongo *f(a)<0* y *f(b)>0.-*



Puede existir varios valores de x para los cuales f(x)=0. Probaremos que existe al menos uno y lo haremos buscando el mayor valor de $x \in (a,b)$ para el cual *f(x)=0.*

Llamamos X al conjunto definido de la siguiente manera:

$X = \{x \in [a,b] / f(x) \leq 0\}$

$X \neq \phi$ ya que al menos existe $a \in X / f(a) < 0$.

X es un conjunto acotado porque $X \subset [a,b]$

Como X es acotado tiene un supremo; hagamos c = supremo de X. Probaremos que $f(c) = 0$.

1ro) Supongo $f(c) > 0$; luego por el teorema de conservación de signos:

$\exists N_\delta(c) / f(x) > 0 \ \forall x \in N_\delta(c)$ esto es $c - \delta < x < c + \delta$; entonces ningún punto de X puede pertenecer al intervalo, luego $(c - \delta)$ sería el supremo de X que contradice la suposición de que sea $c > c - \delta$; Entonces no puede ser $f(c) > 0$.

2do) Supongo $f(c) < 0$; luego por el teorema de conservación de signos:

$\exists N_\delta(c) / f(x) < 0 \ \forall x \in N_\delta(c)$ lo que significa *f(x)*< 0 $\quad \forall x : c - \delta < x < c + \delta$; lo que contradice c= supremo de X; $f(c)$ tampoco puede ser negativo. Esta contradicción proviene de suponer $f(0) \neq 0$.

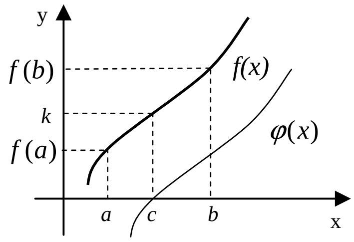
Luego:

$f(c) = 0$;

Como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0 \Rightarrow c \neq a$ y $c \neq b$, o sea $c \in (a,b)$

Teorema del valor intermedio para funciones continuas

4. Sea *f(x)* continua en $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier número k entre $f(a)$ y $f(b), \exists c \in (a,b) / f(c) = k$.



En otras palabras: "Una función continua que toma dos valores distintos, toma cualquier valor intermedio entre ellos".

Prueba:
Supongo $f(a) < f(b)$ y $k \in \boldsymbol{R} / f(a) < k < f(b)$. Debo probar que $\exists c \in (a, b) \; / \; f(c) = k$.

Tomo $\varphi(x) = f(x) - k$ que sigue siendo continua en $[a, b]$

$\left.\begin{array}{l}\varphi(a) = f(a) - k < 0 \\ \varphi(b) = f(b) - k > 0\end{array}\right\}$ como $\varphi(a).\varphi(b) < 0$, cumple con la Hipótesis del Teorema de Bolzano, por lo tanto: $\exists c \in (a,b) / \varphi(c) = 0$

$\varphi(c) = f(c) - k = 0 \Rightarrow f(c) = k$; ver que $c \neq a$ y $c \neq b$;

si $c = a \Rightarrow f(c) = f(a) < k$;

si $c = b \Rightarrow f(c) = f(b) > k$

Teorema de Weierstrass

5. Si *f(x)* es continua en $[a,b]$, entonces está acotada en él;

$\exists k \in \boldsymbol{R} / \forall x \in [a,b]: |f(x)| \leq k$.

Ej: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en el intervalo $[0,1]$ puesto que deja de serlo en $x = 0$ y no tiene valor máximo en $(0,1)$, por el contrario, excede a cualquier número, por grande que sea tomando *x* suficientemente pequeño.